Exercícios Adicionais - Produto Interno

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

1. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Mostre que se $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{v}_4 \rangle = 0$, então $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 | \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_4 \rangle$
   (b) Prove que se $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_4 \rangle = 0$ e $\mathbf{v}_1$ é unitário, então $\langle \mathbf{v}_1 | \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_4 \rangle = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) Mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ são ortogonais e unitários, então $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4\| = 2$.

2. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ e suponha que $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v}_i \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Verifique que $\mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores de $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

3. Verifique que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vale
$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \frac{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2}{4}.$$
   e
$$2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$
   Essas equações são tradicionalmente chamadas respectivamente de *identidade de polarização* e *identidade do paralelogramo*. A primeira mostra que é possível definir o produto interno a partir da norma de vetores. A segunda relaciona as medidas das arestas do paralelogramo definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com o tamanho das diagonais do mesmo.

4. Este exercício tem como objetivo mostrar que a escolha adequada de uma base do espaço vetorial pode fazer com que a representação matricial de uma dada transformação linear fique bem simples. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a reflexão ortogonal em torno do plano
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}.$$
   (a) Determine $[T]_\varepsilon$, onde ε é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine uma base para H e uma base para $H^\perp$. Denote por γ a reunião dessas duas bases (e portanto γ é uma base de $\mathbb{R}^3$).
   (c) Determine $[T]_\gamma$ (e observe como essa representação matricial é mais simples que a do item (a). Isso indica que uma escolha adequada de base para o espaço vetorial em questão pode simplificar muito a representação matricial de uma dada transformação. Neste caso, a escolha da base γ faz com que $[T]_\gamma$ seja uma matriz diagonal. Falaremos sistematicamente sobre esse tipo de fenômeno quando tratarmos de diagonalização, no capítulo 7).

(d) Aplique o processo de ortonormalização de Grand-Schmidt sobre a base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mu = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,-1)\}$$

para obter uma base ortonomal δ de $\mathbb{R}^3$.

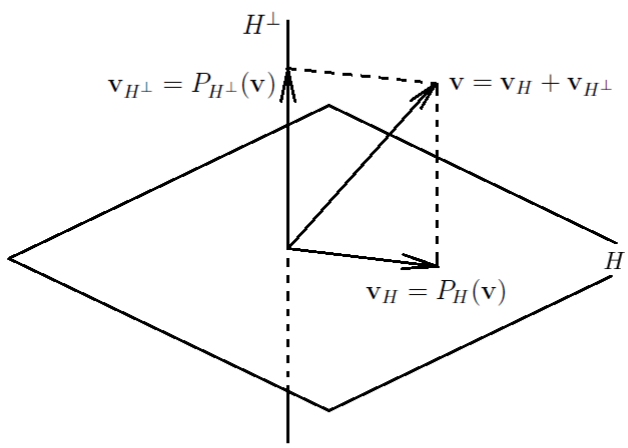
(e) Encontre $[T]_\delta$ e verifique numericamente as identidades $[T]_\delta = [I]_{\delta\leftarrow\mu}[T]_\mu[I]_{\mu\leftarrow\delta}$ e $[T]_\delta = [I]_{\delta\leftarrow\varepsilon}[T]_\varepsilon[I]_{\varepsilon\leftarrow\delta}$.

(f) Verifique que $[I]_{\delta\leftarrow\varepsilon} = ([I]_{\varepsilon\leftarrow\delta})^T$. (Esta é outra das boas propriedades das bases ortonormais: A inversa de uma matriz de mudança de coordenadas entre bases ortonormais é a sua transposta. Isto não se cumpre em geral; por exemplo, verifique que $[I]_{\delta\leftarrow\mu}$ não satisfaz esta propriedade.)

5. Mostre que $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$

6. Estude a demonstração do Teorema 5.23 e do Corolário 5.24 do livro. Usaremos esse corolário no exercício seguinte.

7. Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Em virtude do fato que $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$, nós temos que cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ pode se decompor como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$, com $\mathbf{v}_H \in H$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. A seguinte figura da uma ideia geométrica desta decomposição:



Além demais, sabemos que tal decomposição é única e portanto, podemos usá-las para definir as projeções:

$$P_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \;\; P_H(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_H$$

e

$$P_{H^\perp} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \;\; P_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{H^\perp}.$$

(a) Sejam $\beta_H = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ e $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ bases de H e $H^\perp$, respetivamente. Prove que $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Encontre as matrizes $[P_H]_\beta$ e $[P_{H^\perp}]_\beta$.

(c) Prove que $P_H \circ P_H = P_H$, $P_{H^\perp} \circ P_{H^\perp} = P_{H^\perp}$, $P_H \circ P_{H^\perp} = 0$ e $P_{H^\perp} \circ P_H = 0$. (Aqui 0 denota a transformação linear cujo domínio e contradomínio são iguias a $\mathbb{R}^n$ e que transforma cada vetor no vetor nulo.)

(d) Prove que $\mathrm{Nuc}(P_H) = \mathrm{Im}(P_{H^\perp})$ e que $\mathrm{Nuc}(P_{H^\perp}) = \mathrm{Im}(P_H)$.

(e) Prove que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Nuc}(P_H) \oplus \mathrm{Im}(P_H)$, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Nuc}(P_H) \oplus \mathrm{Nuc}(P_{H^\perp})$ e que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(P_H) \oplus \mathrm{Im}(P_{H^\perp})$.

(f) Mostre que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle P_H(\mathbf{v}) | P_{H^\perp}(\mathbf{v}) \rangle = 0$.

(g) Mostre que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|P_H(\mathbf{v})\| \leqslant \|\mathbf{v}\|$.

(h) Considere agora o subespaço de $\mathbb{R}^4$: $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x - y + 2z + t = 0\}$. Encontre, usando este subespaço específico, expressões analíticas para P_H e $P_{H^\perp}$, respetivamente. Refaça, para este exemplo, todos os itens anteriores.

8. Relembre que a *distância* entre os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|} = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}.$$

Neste exercício você mostrará que dado um subespaço vetorial H de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v}_0 \notin H$, existe um único vetor $\mathbf{w}_0 \in H$ que realiza a *mínima* distância entre $\mathbf{v}_0$ e os vetores de H. Esse vetor é $\mathbf{w}_0 = P_H(\mathbf{v}_0)$: a projeção ortogonal de $\mathbf{v}_0$ sobre H. Para esse fim, elaboramos um roteiro com alguns passos:

(a) Mostre que $\mathbf{v}_0 - P_H(\mathbf{v}_0) \in H^\perp$.

(b) Mostre que os vetores

$$\mathbf{v}_0 - P_H(\mathbf{v}_0) \quad \text{e} \quad P_H(\mathbf{v}_0) - \mathbf{w}$$

são ortogonais para todo $\mathbf{w} \in H$.

(c) Mostre que $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}\|^2 \geqslant \|\mathbf{v}_0 - P_H(\mathbf{v}_0)\|^2$ para todo $\mathbf{w} \in H$.
Dica: observe que

$$\mathbf{v}_0 - \mathbf{w} = (\mathbf{v}_0 - P_H(\mathbf{v}_0)) + (P_H(\mathbf{v}_0) - \mathbf{w}).$$

Use o teorema de Pitágoras para vetores: se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são ortogonais, então*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

(d) Conclua que $d(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) > d(\mathbf{v}_0, P_H(\mathbf{v}_0))$ para todo $\mathbf{w} \in H$, $\mathbf{w} \neq P_H(\mathbf{v}_0)$. Portanto, $P_H(\mathbf{v}_0)$ é o único vetor que minimiza a distância de $\mathbf{v}_0$ ao subespaço H.

(e) Conclua que a menor distância entre $\mathbf{v}_0$ e os vetores de H é igual a $\|\mathbf{v}_0 - P_H(\mathbf{v}_0)\|$.

9. Sejam E um espaço vetorial, $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ bases de E e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ vetores quaisquer de E.

(a) Prove que

$$\dim\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle = \dim\langle [\mathbf{w}_1]_\beta, [\mathbf{w}_2]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_k]_\beta \rangle.$$

(b) Conclua do item anterior que os vetores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ são linearmente independentes se, e somente se, os vetores $[\mathbf{w}_1]_\beta, [\mathbf{w}_2]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_k]_\beta$ são linearmente independentes.

(c) Escolhendo um valor da sua preferência para k, mostre vetores específicos $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle \neq \langle [\mathbf{w}_1]_\beta, [\mathbf{w}_2]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_k]_\beta \rangle.$$

(d) Considerando $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e $k \geq 1$, é possível que

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle \cap \langle [\mathbf{w}_1]_\beta, [\mathbf{w}_2]_\beta, \ldots, [\mathbf{w}_k]_\beta \rangle = \{0\}?$$

(e) Suponha que β e γ são bases ortonormais. Prove que elemento na linha i e na coluna j da matriz $[I]_{\beta \leftarrow \gamma}$ é o coseno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_j$. Isto é, se $\measuredangle(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)$ denota o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_j$, então

$$[I]_{\beta \leftarrow \gamma} = \begin{bmatrix} \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)) & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)) & \ldots & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1)) \\ \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)) & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) & \ldots & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_m)) & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_m)) & \ldots & \cos(\measuredangle(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)) \end{bmatrix}.$$

(f) Prove que $[I]^{-1}_{\beta \leftarrow \gamma} = [I]^T_{\beta \leftarrow \gamma}$.

10. O objetivo deste exercício é mostrar um método que permite, dado um sistema de equações lineares sem soluções, encontrar vetores que são quase soluções.

Considere $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Denote por $A_1, \ldots, A_n$ as colunas da matriz A e seja $H = \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas de A. Relembre que o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução se, e somente se, $\mathbf{b} \in H$, e portanto, se este sistema não tem solução, então $\mathbf{b} \notin H$. Como podemos fazer para encontrar vetores que estejam muito próximos de ser soluções? Uma possibilidade é modificar gradualmente $\mathbf{b}$ até lograr que ele pertença ao subespaço gerado pelas colunas da matriz A. Mas, queremos que tal modificação seja o mais simples possível. Noutras palavras, queremos trocar o $\mathbf{b}$ original por um $\hat{\mathbf{b}} \in H$ tal que $d(\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{b})$ seja a mínima possível; problema que foi resolvido no exercício anterior. Observe a figura para ter um ideia geométrica:

Os itens seguintes ofrecem um roteiro completo para obter as "quase" soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a) Mostre que

$$H = \{A\mathbf{x} \,:\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

Em outras palavras, considerando a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = Ax$, então $H = \mathrm{Im}(T)$ (Pense em A como a matriz da transformação linear T na base canônica). Conclua que o vetor $\hat{\mathbf{b}} \in H$ que minimiza a distância de b ao subespaço H é da forma $\hat{\mathbf{b}} = A\bar{\mathbf{x}}$ para algum $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$.

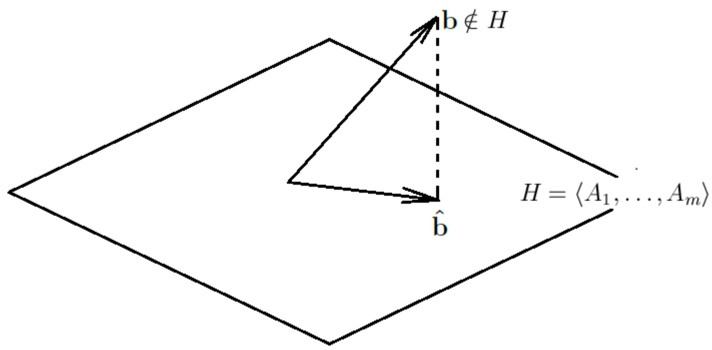


Figura 1: $\hat{\mathbf{b}}$ é o vetor de H mais próximo possível de $\mathbf{b}$.

(b) Como observamos no começo, o exercício anterior garante que $\hat{\mathbf{b}} = P_H(\mathbf{b})$. Conclua que o sistema $A\mathbf{x} = P_H(\mathbf{b})$ possui pelo menos uma solução $\bar{\mathbf{x}}$.

(c) Lembrando que $H = \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ e sendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, mostre que sistema $A\mathbf{x} = P_H(\mathbf{b})$ possui as mesmas soluções que o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle A_1|A_1\rangle x_1 + \langle A_2|A_1\rangle x_2 + \cdots + \langle A_m|A_1\rangle x_m & = & \langle \mathbf{b}|A_1\rangle \\ \langle A_1|A_2\rangle x_1 + \langle A_2|A_2\rangle x_2 + \cdots + \langle A_m|A_2\rangle x_m & = & \langle \mathbf{b}|A_2\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle A_1|A_m\rangle x_1 + \langle A_2|A_m\rangle x_2 + \cdots + \langle A_m|A_m\rangle x_m & = & \langle \mathbf{b}|A_m\rangle \end{array} \right. \tag{1}$$

Dica: A condição $\mathbf{b} \notin H$ *é equivalente à condição* $\mathbf{b} - A\mathbf{x} \in H^{\perp}$*, para qualquer solução* $\mathbf{x}$ *do sistema* $A\mathbf{x} = P_H(\mathbf{b})$*; o que, por sua vez, é equivalente a dizer que* $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ *é ortogonal a* $A_1, A_2, \ldots, A_n$*, devido a que estes últimos vetores geram* H*. Esta condição pode ser formulada em termos do sistema de equações lineares:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}|A_1\rangle & = & 0 \\ \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}|A_2\rangle & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}|A_m\rangle & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Justifique estas afirmações. Em seguida, deduza o sistema (1) *a partir do sistema* (2)*.*

(d) Verifique que o sistema (1) pode ser escrito na forma mais sucinta: $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, onde A^T denota a transposta da matriz A.