Exercícios Adicionais

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Somatórios

1. Usando notação de somatório, escreva:
   (a) a combinação linear $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{50}\mathbf{v}_{50}$;
   (b) o sistema linear abaixo usando um somatório para cada equação:
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + \cdots + a_{1n}x_n \ = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
   (c) um elemento genérico $\mathbf{u}$ de $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$;
   (d) $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$, supondo que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle$;

2. (a) Considere a seguinte afirmação: $\mathbf{w}$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Preencha os $\square$ abaixo com índices para que o somatório represente essa afirmação.
   $$\mathbf{w} = \sum_{\square=\square}^{\square} b_\square \cdot \mathbf{u}_\square \tag{1}$$
   (b) Suponha que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. Escreva o vetor $\mathbf{w}$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ usando notação de somatório. (Dica: comece expressando os vetores $\mathbf{u}$'s como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}$'s:
   $$\mathbf{u}_\square = \sum_{\square=\square}^{\square} a_{\square\square} \cdot \mathbf{v}_\square. \tag{2}$$
   Depois substitua (2) em (1). Por que os coeficientes a's acima têm dois sub-índices?)

Espaços vetoriais e subespaços

1. Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ não é espaço vetorial com as operações $+$ e $\cdot$ definidas em cada item abaixo. Em cada caso, diga qual(is) axioma(s) de espaço vetorial não vale(m).

(a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, b)$;

(b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$;

(c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

2. *O objetivo deste exercício é enfatizar algumas sutilezas na definição de espaço vetorial. É importante notar que existe somente um único par de operações capazes de fazer um subconjunto S de um espaço vetorial ser um subespaço vetorial dele: exatamente as operações $+$ e $\cdot$ do espaço V restritas aos elementos de S. Portanto, se com estas operações S não for espaço vetorial, ele* **não é subespaço vetorial de** $(V, +, \cdot)$. *No entanto, isso não significa que não seja possível colocar em S uma soma e um produto por escalares capazes de torná-lo um espaço vetorial; só que neste caso não há relação entre as operações de V e as novas introduzidas apenas em S.*

   Considere $S = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Sejam $\hat{+} : S \times S \longrightarrow S$ e $\hat{\cdot} : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$ definidas por $(x, y, 1)\hat{+}(x', y', 1) = (x + x', y + y', 1)$ e $\lambda\hat{\cdot}(x, y, 1) = (\lambda x, \lambda y, 1)$. Prove que $(S, \mathbb{R}, \hat{+}, \hat{\cdot})$ é um espaço vetorial, mas ele não é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

3. O *traço* de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o número real

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Considere $W = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ com as operações usuais de soma de matrizes e produto de matriz por escalar.

   (a) Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

   (b) Calcule a dimensão de W.

   (c) Encontre um subespaço vetorial $U \subset W$ de dimensão 3.

   (d) Seja $D = \{A \in W : A \text{ é matriz diagonal}\}$. Mostre que D é um subespaço vetorial de W e calcule sua dimensão.

4. Determine se cada um dos subconjuntos $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ abaixo com as operações usuais de soma de matrizes e produto de matrizes por escalares reais é espaço vetorial. Se sim, calcule sua dimensão. Se não, explicite qual(is) axioma(s) de espaço vetorial não vale(m).

   (a) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\}$;

   (b) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{11}^3 + a_{22}^3 = 0\}$;

   (c) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0\}$

5. *O objetivo deste exercício é mostrar que existem espaços vetoriais bem distantes de nossa intuição, pelo menos à primeira vista. É possível munir um conjunto de elementos arbitrários de uma estrutura de espaço vetorial definindo operações $+$ e $\cdot$ que satisfaçam aos axiomas de espaço vetorial da definição 3.1 do livro.*

Dados os símbolos $\blacklozenge, \heartsuit, \blacksquare, \clubsuit, \spadesuit$, considere

$$E = \{\alpha_1 \blacklozenge + \alpha_2 \heartsuit + \alpha_3 \blacksquare + \alpha_4 \clubsuit + \alpha_5 \spadesuit \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 5\}.$$

Considere também as operações $+ : E \times E \to E$ e $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ definidas respectivamente por: dados

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \blacklozenge + \alpha_2 \heartsuit + \alpha_3 \blacksquare + \alpha_4 \clubsuit + \alpha_5 \spadesuit \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \beta_1 \blacklozenge + \beta_2 \heartsuit + \beta_3 \blacksquare + \beta_4 \clubsuit + \beta_5 \spadesuit$$

dois elementos arbitrários de E e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (\alpha_1 + \beta_1) \blacklozenge + (\alpha_2 + \beta_2) \heartsuit + (\alpha_3 + \beta_3) \blacksquare + (\alpha_4 + \beta_4) \clubsuit + (\alpha_5 + \beta_5) \spadesuit$$

$$\alpha \cdot \mathbf{u} := (\alpha\alpha_1) \blacklozenge + (\alpha\alpha_2) \heartsuit + (\alpha\alpha_3) \blacksquare + (\alpha\alpha_4) \clubsuit + (\alpha\alpha_5) \spadesuit.$$

(a) Prove que $(E, \mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

(b) Encontre uma base de E. Qual é a dimensão de E?

(c) Dê um exemplo de um subespaço vetorial S de E cuja dimensão seja 4.

6. Verdadeiro ou falso:

   (a) $\sin(\theta) \in \langle \sin(2\theta), \sin(3\theta) \rangle$.

   (b) As funções $1, \sec^2(\theta), \tan^2(\theta)$ são linearmente independentes.