Exercícios Adicionais

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Observação: Durante esta lista nos usamos indistintamente as frases sistema gerador e conjunto gerador.

Operações com subespaços

Em sala foram vistas duas operações com subespaços: intersecção e soma. Dados V e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$, nós definimos:

$$V \cap W = \{x \in E \,:\, x \in V \text{ e } x \in W\},$$

$$V + W = \langle V \cup W \rangle = \{v + w \in E \,:\, v \in V, w \in W\}.$$

Noutras palavras, a intersecção é formada por aqueles vetores que são comuns a ambos os subespaços, enquanto que soma é o subespaço vetorial de E gerado pela união dos vetores de V e dos vetores de W. Lembre também que a união de dois subespaços V e W é um subespaço de E se somente se um dos subespaços V ou W está contido no outro, isto é, se somente se $V \subseteq W$ ou $W \subseteq V$. Nesse caso, a união coincide com a soma. Este é o motivo pelo qual a união não aparece na lista acima.

No caso em que o único vetor comum aos conjuntos V e W seja o vetor nulo, isto é $V \cap W = \{0\}$, dizemos que a soma de V e W é direta e escrevemos $V \oplus W$ em vez de $V + W$.

1. Considere os subespaços vetoriais:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z = 0, 2x + 2y + 2z = 0\}$$

$$W = \langle (-1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle$$

   (a) Encontre um sistema (conjunto) gerador de V.

   (b) Encontre um sistema de equações lineares homogêneo $Ax = 0$ do qual W seja o conjunto solução.

   (c) Encontre uma base e a dimensão de $W \cap V$.

   (d) Encontre uma base e a dimensão de $V + W$.

   (e) É a soma de V e W direta? Justifique.

   O próximo exercício fornece uma fórmula para calcular a dimensão do subespaço soma $V + W$.

2. Sejam V e W dois subespaços de um subespaço vetorial $(E, +, \cdot)$. Prove que

$$\dim V + W = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W).$$

DICA: Considere primeiro uma base da interseção: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$. Os vetores desta base são linearmente independentes em V, portanto podemos completá-la (acrescentar vetores) até obter uma base de V: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_l$. (Qual é portanto a dimensão de V?) O mesmo podemos fazer com W. A base da interseção é um sistema (conjunto) linearmente independente em W e consequentemente, podemos acrescentar vetores até obter uma base de W: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_s$. (Qual é portanto a dimensão de W?) Assim temos que $\dim (V \cap W) = k$, $\dim V = l$ e $\dim W = s$. Agora prove que os vetores

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_s$$

formam uma base $V + W$ e conte os vetores que aparecem nesta base para deduzir a fórmula.

3. Use a fórmula dada no exercício anterior para provar que a soma de V e W é direta se e somente se $\dim V + W = \dim V + \dim W$.

   Este resultado fornece a seguinte fórmula: $\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$.

   O seguinte exercício destaca uma propriedade muito importante da soma direta.

4. Sejam V e W dois subespaços de um subespaço vetorial $(E, +, \cdot)$.
   (a) Prove que a soma de V e W é direta se e somente se todo vetor $x \in V + W$ se decompõe de forma única como soma de um vetor $v \in V$ e um vetor $w \in W$.

   Observação: A frase $x \in V + W$ se decompõe de forma única como soma de um vetor de V e um de W pode ser vista um pouco mais formalmente da seguinte forma: Se $x \in V + W$ é tal que $x = v_1 + w_1$ e $x = v_2 + w_2$ para alguns $v_1, v_2 \in V$ e alguns $w_1, w_2 \in W$, então se tem que $v_1 = v_2$ e $w_1 = w_2$.

   (b) Prove que a soma de V e W **não** é direta se e somente se todo vetor $x \in V + W$ se decompõe de infinitas formas como soma de um vetor $v \in V$ e um vetor $w \in W$.

Transformações Lineares

O primeiro exercício fornece uma ferramenta forte para determinar a imagem de um subespaço por uma transformação linear.

1. Sejam $T : E \to F$ uma transformação linear e S um subespaço vetorial de E. Mostre que se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ geram S, então os vetores $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_k)$ geram $T(S)$: a imagem de S por T.

   Noutras palavras, se queremos descobrir em que subespaço a transformação linear T transforma S, basta ver como T transforma um sistema (conjunto) gerador de S.

2. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definida por:

$$L(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, -x - 2y + z - t, -y + z, 0, y - z).$$

(a) Encontre uma base e a dimensão de $\mathrm{Nuc}(L)$.

(b) Encontre um sistema (conjunto) gerador de $\mathrm{Im}(L)$ que não seja linearmente independente.

(c) Use o teorema do núcleo e a imagem para determinar a dimensão de $\mathrm{Im}(L)$.

(d) L é injetora? Justifique.

(e) L é sobrejetora? Justifique.

(f) Para cada um dos subespaços listados abaixo, encontre um sistema (conjunto) gerador da sua imagem por L:

(a) $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x = y; z = 3t\}$.
(b) $S_2 = \langle(-1, 2, 3, 1), (0, 3, -1, 0), (1, 1, 1, -1)\rangle$.
(c) $S_3 = S_1 \cap \mathrm{Nuc}(L)$.
(d) $S_4 = S_1 + S_2$.

(g) Dê um exemplo de um plano π de $\mathbb{R}^4$ que quando transformado por L vira um ponto em $\mathbb{R}^5$.

(h) Dê um exemplo de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3 cuja imagem por L é uma reta em $\mathbb{R}^5$.

(i) Existe um plano π de $\mathbb{R}^4$ cuja imagem por L seja um plano em $\mathbb{R}^5$? Justifique a sua respuesta.

3. Considere a transformação linear $U : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$U \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a - c) + (b - c)x + cx^2.$$

(a) Exiba uma base do núcleo de U e deduza dimensão deste.

(b) Encontre o conjunto S de todas as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$U \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \sin(\pi/2) + \arctan(1)x^2.$$

(c) Determine um sistema (conjunto) gerador para a imagem por U dos seguintes subespaços:

(a) $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = A^T\}$ (matrizes simétricas).
(b) $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = -A^T\}$ (matrizes antissimétricas)
(c) $S_3 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \mathrm{tr}\, A = 0\}$ (matrizes de traço 0)

(d) Encontre uma base para o subespaço vetorial $U(S_1) + U(S_2)$ de $\mathcal{P}_2$

(e) Verifique $S_2 \cup S_3$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Nos próximos exercícios você deve usar o seguinte teorema, chamado em muitos livros de *Teorema fundamental das transformações lineares*. A sua demonstração fornece um roteiro para resolver os exercícios propostos.

Teorema. Sejam E e F dois espaços vetoriais, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ uma base de E e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vetores quaisquer em F (Observe que estamos pegando a mesma quantidade de vetores em E e em F.) Existe uma ÚNICA transformação linear $T : E \to F$ tal que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$.

Em linguagem coloquial, esse teorema diz que uma transformação linear fica inteiramente determinada pelas imagens dos elementos de uma base do domínio. Isto é, se você a cada vetor $\mathbf{u}_i$ de uma base de E (domínio) faz corresponder um vetor $\mathbf{v}_i$ de F (contra-domínio), então temos uma única tranformação linear T satisfazendo essas condições. Como encontramos essa T? Vejamos a demonstração do teorema e derivemos dela um roteiro.

Demonstração do Teorema. Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ é uma base E, qualquer vetor $\mathbf{u} \in E$ se escreve de maneira única como combinação linear dos $\mathbf{u}_i's$. Ou seja, existem números reais únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{u}_i. \tag{1}$$

Portanto, a imagem por T do vetor $\mathbf{u}$ é a mesma que a imgem por T do vetor $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{u}_i$. Segue disto que:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}) &= T(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{u}_i)\\
T(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i) \quad \text{(devido à linearidade de } T\text{)}\\
T(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{v}_i \quad \text{(já que } T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i\text{)}.
\end{aligned}$$

A expressão de T desejada é $T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{v}_i$.

Para verificar que T é única transformação linear que satisfaz para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, suponha que existe outra transformação linear $G : E \to F$ satisfazendo também que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $G(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$. Repetindo as contas que fizemos acima para T, mas agora com G, nós obtemos que $G(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{v}_i$ qualquer que seja o vetor $\mathbf{u} \in E$. Portanto, qualquer vetor $\mathbf{u} \in E$ tem a mesma imagem tanto por T quanto por G. Como estas duas transformações tem o mesmo domínio e o mesmo contradomínio, nós concluímos que $T = G$.

Qual é o roteiro que se deriva da demostração acima? Vejamos!

Roteiro: Se você quiser encontrar a transformação linear T de E para F que satisfaz que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, você faz:

Passo 1 Pega um vetor genérico de E e expressa ele como combinação linear da base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, colocando os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ em função das coordenadas do vetor genérico. Assim,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i.$$

Passo 2 Aplica T em ambos os lados e usa a linearidade para obter:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i).$$

Passo 3 Usa o fato que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ para concluir:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Observação: Existem alguns exercícios nos quais você não tem exatamente a informação que você precisa para usar o teorema fundamental das transformações lineares. Nesses casos você pode ter informação a menos ou informação a mais (redundante). Se você tiver informação a menos, então você precisa acrescentar dados até obter aquilo que você precisa. Caso você tenha informação a mais (redundante), você extrai dela o que você necessita.

4. Encontre a expressão analítica da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (-1, 5)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$.

5. Encontre a expressão analítica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que a imagem de T esteja gerada pelos vetores $(1, 2, 0, -4)$ e $(2, 0, -1, -3)$. A transformação linear encontrada é a única que satisfaz a condição dada no exercício?

6. Encontre a expressão analítica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
   - O núcleo de T contenha o plano π gerado pelos vetores $(1, 2, 3, 4)$ e $(0, 1, 1, 1)$.
   - A iterseção do núcleo de T com a reta que passa pela origem, é perpendicular a π e paralela ao vetor $(1, 1, -1, 0)$ tenha dimensão maior do que ou igual a 1.
   - A imagem de T esteja gerada pelos vetores $(1, 0, -3)$ e $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$.

A transformação linear encontrada é a única que satisfaz as condições dada no exercício?