Exercícios Adicionais

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feitos os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Dependência Linear e Subespaços gerados

1. Sejam v_1, v_2, v_3 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.
   (a) Prove que os vetores v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3 são também linearmente independentes.
   (b) É possível que algum dos vetores v_1, v_2, v_3 seja o vetor nulo? Justifique a sua resposta.

2. Considere dois vetores não paralelos v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^{20}$.
   (a) Prove que os vetores $v_1 + v_2$ e $v_1 - v_2$ são linearemente independentes.
   (b) O subespaço gerado pelos vetores v_1+v_2 e v_1-v_2 em $\mathbb{R}^{20}$ é um plano que denotamos por π. Encontre uma equação paramétrica para π.
   (c) Qual é o número mínimo de equações lineares que você precisa para descrever um plano em $\mathbb{R}^{20}$? Perguntando de outra forma: a equação cartesiana de um plano em $\mathbb{R}^{20}$ é um sistema de no mínimo quantas equações?

   Sugestão: Pense nos casos que você conhece. Em $\mathbb{R}^3$, basta uma equação linear para descrever um plano, enquanto que você precisa de duas equações lineares para descrever uma reta.

3. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 vetores linearmente independetes em $\mathbb{R}^n$ e seja $a \notin \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Note que $n > 4$.
   (a) a pode ser o vetor nulo? Justifique a sua resposta.
   (b) Prove que os vetores $a + v_1$, $a + v_2$, $a + v_3$ e $a + v_4$ são linearmente independentes.
   (c) $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle a + v_1, a + v_2, a + v_3, a + v_4 \rangle$? Justifique a sua resposta.

4. Assinale V(erdadeiro) ou F(also) quanto à validade da afirmação

   A união de dois subconjuntos LI's de $\mathbb{R}^n$ é ainda um subconjunto LI de $\mathbb{R}^n$.

   (   ) Sempre.
   (   ) Nunca.
   (   ) Quando os subconjuntos considerados são disjuntos.
   (   ) Quando algum dos subconjuntos está contido no outro.

( ) Quando algum dos subconjuntos é disjunto do subespaço gerado pelo outro.
( ) Quando o número de elementos de um dos subconjuntos mais o número de elementos do outro subconjunto é igual a n.

Matrizes e sistemas de equações

1. Seja

$$S := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}.$$

Isto é, S é o conjunto das matrizes 2×2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Quais são os possíveis valores de a, b, c e d?

(b) Prove que se $A, B \in S$, então $A + B \in S$. Noutras palavras, se duas matrizes comutam com $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então a soma delas também comuta com $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Prove que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in S$, então $\alpha \cdot A \in S$. Noutras palavras, se A comuta com $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então podemos multiplicar ela por qualquer número real que a matriz resultante também comuta com $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Se $A, B \in S$, então $A \cdot B \in S$? Justifique a sua resposta.

2. Considere o sistema de equações lineares não homogêneo $A \cdot x = b$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $x, b \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $b \neq 0$. Suponha que ele seja possível e denote por S o conjunto das suas soluções. Denote também por S_0 o conjunto das soluções do sistema homogêneo associado $A \cdot x = 0$.

(a) Prove que se $x, x' \in S$, então $x - x' \in S_0$.

(b) Prove que se $x \in S$ e $x_0 \in S_0$, então $x + x_0 \in S$.

(c) Conclua que as soluções do sistema não homogêneo podem ser obtidas a partir da operação de somar uma solução particular x_p dele com as soluções do sistema homogêneo. Isto é, $S = \{x_p + x_0 \,:\, Ax_0 = 0\}$.

(d) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre todas as soluções do sistema homogêneo associado.

(b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ uma é solução do sistema não homogêneo dado acima, encontre todas as soluções deste sistema.