Exercícios Adicionais - Determinantes

Observação: Estes exercícios são um complemento àqueles apresentados no livro. Eles foram elaborados com o objetivo de oferecer aos alunos exercícios de cunho mais teórico. Nós recomendamos fazê-los depois de ter feito os exercícios do livro proposto pela equipe de AL.

Relembre que, fixado $n \in \mathbb{N}$, o *determinante* é a *única* função definida no conjunto das matrizes $n \times n$, denotada por $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- $\det(I) = 1$, onde I é a matriz identidade $n \times n$;
- se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tem colunas linearmente dependentes, então $\det(A) = 0$;
- det é linear nas colunas das matrizes, ou seja, se $u_1, \ldots, u_k, v_k, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$, são vetores-colunas e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

  $$\det[u_1 \cdots u_k + \lambda v_k \cdots u_n] = \det[u_1 \cdots u_k \cdots u_n] + \lambda \det[u_1 \cdots v_k \cdots u_n]$$

  para $k = 1, \ldots, n$.

1. Verifique que a função $\det : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

   $$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

   é o determinante de matrizes 2×2, ou seja, satisfaz às três condições acima.

2. Encontre exemplos para os quais $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

3. Relembre que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é *inversível* se existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = I$. A matriz B é denominada *inversa* de A e é denotada por A^{-1}. Assuma que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para todas as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

   (a) Mostre que se A é inversível, então $\det(A) \neq 0$ e que

   $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

   (b) Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então A é inversível.

   Roteiro: para mostrar que A é inversível, vamos mostrar que é possível construir a inversa de A explicitamente. Lembre-se que se $\det(A) \neq 0$, *então o sistema linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem solução (única) para todo* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *(há várias formas de justificar este fato. Uma é usando escalonamento de matrizes. Outra é pela* Regra de Cramer - *ver exercício 4). Queremos mostrar que existe B tal que AB = I. Denotando por* $\mathbf{b_j}$ *as colunas de B e por* $\mathbf{e}_j$ *as colunas de I, verifique que a equação AB = I é equivalente a*

   $$[A\mathbf{b_1} \cdots A\mathbf{b_n}] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n].$$

   Então, A tem inversa se e somente se cada um dos sistemas lineares

   $$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

   tem solução, para $j = 1, \ldots, n$. *Conclua que se* $\det(A) \neq 0$, *esses n sistemas têm solução. Quem deve ser portanto a inversa de A?*

(c) Mostre que se $AA^{-1} = I$ então $A^{-1}A = I$. Portanto, quando a inversa de A existe, ela comuta com A.

Dica: observe que se $det(A) \neq 0$, então $det(A^{-1}) \neq 0$ (por quê?). Portanto, A^{-1} é inversível, ou seja, existe B tal que $A^{-1}B = I$.

(d) Mostre que se A é inversível, a inversa de A é única.

Dica: suponha que B é outra matriz tal que $AB = I$. Use os itens anteriores para concluir que $B = A^{-1}$.

4. Estude a demonstração da *Regra de Cramer* (Lema 6.20 do livro). Use a fórmula do lema para resolver os itens seguintes:

(a) Encontre a solução do sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) Use a regra de Cramer para dar outra justificativa para o item b do exercício 3.

(c) Usando o roteiro do item b do exercício 3, calcule A^{-1} para a matriz A acima e verifique que a matriz encontrada é de fato a inversa de A.

5. Relembre-se que $\det(A) = \det(A^T)$. Uma matriz $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é *ortogonal* se $Q^TQ = I$. Observe que, pelo exercício anterior, toda matriz ortogonal é inversível e sua inversa é sua transposta. Em particular, Q é ortogonal se e somente se $QQ^T = I$.

(a) Verifique que o determinante de uma matriz ortogonal é 1 ou -1.

(b) Mostre que uma matriz é ortogonal se e somente se suas colunas são vetores *ortonormais*, ou seja, ortogonais de tamanho 1.

(c) Mostre que se as colunas de Q são ortonormais, as linhas de Q também são.

(d) Dê exemplos de matrizes ortogonais 2×2 e 3×3 *diferentes de I* e calcule suas inversas.

(e) Dê exemplos de matrizes 2×2 e 3×3 que tenham determinante 1 mas *não sejam ortogonais*.

6. Neste exercício relembraremos propriedades da representação matricial de uma transformação linear. Lembre que dada uma transformação linear $T : U \longrightarrow V$, $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de U e V respectivamente, a *representação matricial de T relativamente às bases α e β* é a matriz $[T]_{\beta\leftarrow\alpha} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, cuja j-ésima coluna é composta pelas coordenadas de $T(u_j)$ na base β. Em outras palavras,

$$[T]_{\beta\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(u_1)]_\beta & \cdots & [T(u_n)]_\beta \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $[T]_{\beta\leftarrow\alpha}$ tem a seguinte propriedade: $[T]_{\beta\leftarrow\alpha}[u]_\alpha = [T(u)]_\beta$, onde $[u]_\alpha$ é o vetor-coluna cujas entradas são as coordenadas de u na base α.

(b) Mostre que se uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ satisfaz à condição

$$A[u]_\alpha = [T(u)]_\beta$$

então $A = [T]_{\beta\leftarrow\alpha}$. Portanto a representação matricial de uma transformação linear é *única*.

(c) Sejam $T : U \longrightarrow V$ e $S : V \longrightarrow W$ transformações lineares, $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de U, V e W respectivamente. Mostre que

$$[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha} = [S]_{\gamma \leftarrow \beta}[T]_{\beta \leftarrow \alpha}$$

(este é o enunciado do Lema 4.53 do livro, cuja demonstração ele não fornece, mas que você pode fazer seguindo o seguinte roteiro: use o item a para verificar que $[S]_{\gamma \leftarrow \beta}[T]_{\beta \leftarrow \alpha}[u]_\alpha = [S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha}[u]_\alpha$ para todo $u \in U$. Depois aplique o item b).

7. Este exercício contém um roteiro para uma demonstração alternativa da fórmula $[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha} = [S]_{\gamma \leftarrow \beta}[T]_{\beta \leftarrow \alpha}$ do Lema 4.53 do livro, demonstrada acima. Além disso, é um bom exercício para revisar como trabalhar com somatórios. Sejam $T : U \longrightarrow V$ e $S : V \longrightarrow W$ transformações lineares, $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de U, V e W respectivamente. Seguindo o roteiro a seguir, mostre que

$$[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha} = [S]_{\gamma \leftarrow \beta}[T]_{\beta \leftarrow \alpha}.$$

Roteiro: 1) para construir $[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha}$, precisamos escrever cada $(S \circ T)(u_j)$ na base γ. Digamos então que

$$(S \circ T)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i.$$

Então $[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

2) analogamente, para construir $[T]_{\beta \leftarrow \alpha}$ fazemos $T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i$, e portanto

$$[T]_{\beta \leftarrow \alpha} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix};$$

e para construir $[S]_{\gamma \leftarrow \beta}$ fazemos $S(v_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i$, e portanto

$$[S]_{\gamma \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

3) Usando as expressões do item 2 do roteiro e a linearidade das transformações S e T, calcule explicitamente $(S \circ T)(u_j)$ como combinação linear dos w_j (troque quando necessário os índices i, j por outras letras, para que eles não fiquem repetidos nas contas). Compare os coeficientes destas combinações com os coeficientes a_{ij} do item 1 do roteiro e verifique que de fato $[S \circ T]_{\gamma \leftarrow \alpha} = [S]_{\gamma \leftarrow \beta}[T]_{\beta \leftarrow \alpha}$.

8. Sejam $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U.

(a) Seja $\mathrm{Id} : U \longrightarrow U$ a transformação identidade, ou seja, $\mathrm{Id}(u) = u$ para todo $u \in U$. Verifique que

$$[\mathrm{Id}]_{\alpha \leftarrow \beta}[\mathrm{Id}]_{\beta \leftarrow \alpha} = I.$$

Conclua que $\det([\mathrm{Id}]_{\alpha \leftarrow \beta}[\mathrm{Id}]_{\beta \leftarrow \alpha}) = 1$

(b) Seja $T : U \longrightarrow U$ uma transformação linear. Mostre que $\det[T]_\alpha = \det[T]_\beta$. Isso mostra que podemos definir determinantes para uma transformação linear qualquer $T : U \longrightarrow U$ via

$$\det(T) = \det[T]_\alpha,$$

para uma base qualquer à nossa escolha, pois o número $\det[T]_\alpha$ independe da escolha da base α.

Dica: qual a relação entre as matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$?

(c) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa e justifique: existe alguma base α de $\mathbb{R}^3$ tal que a reflexão ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ em torno do plano $x + y - z = 0$ tenha representação matricial

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa e justifique: seja H um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e $P_H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre H. É possível encontrar uma base α de $\mathbb{R}^3$ tal

$$[P_H]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Mostre que uma transformação linear $T : U \longrightarrow U$ é bijetiva se e somente se $\det(T) \neq 0$. Conclua que o item d do exercício anterior é um caso particular deste fato.