Exercícios

1. Dados $\mathbf{u} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (3,2,0)$ e $\mathbf{w} = (2,0,0)$, encontre números α, β, γ tais que $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w} = (1,1,1)$. Os que você encontrou são os únicos possíveis? Justifique.

2. Exiba três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo dos outros dois, nenhuma das coordenadas é igual a zero e $\mathbb{R}^3$ não é gerado por eles.

3. Assinale verdadeiro ou falso e justifique:
   (a) O vetor $\mathbf{w} = (1,-1,2)$ pertence ao espaço gerado por $\mathbf{u} = (1,2,3)$ e $\mathbf{v} = (3,2,1)$.
   (b) Qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear de $\mathbf{u} = (-5,3,2)$ e $\mathbf{v} = (3,-1,3)$.
   (c) Dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, então $0 \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

4. O conjunto dos vetores da forma
$$(x+y, y+z, z+w, w+1) \in \mathbb{R}^4$$
é um espaço gerado por vetores de $\mathbb{R}^4$? Se sim, encotre vetores que o geram. Senão, justifique porque não é um espaço gerado. (Dica: leia o item c da terceira questão e também o último parágrafo da seção 1.3.1 da página 18 do livro)

5. Parametrize o conjunto de soluções da equação
$$2x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{5}z + 2w = 3$$
O conjunto de soluções é um espaço gerado? Justifique.

6. O que devemos exigir sobre os coeficientes $a_1, \dots, a_k, b$ da equação
$$a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = b$$
para que $(0, \dots, 0)$ seja um elemento do conjunto de soluções?

7. Determine a dimensão do conjunto de soluções do sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 & = & 0 \end{cases}$$

8. Mostre que vetores da forma $(a, b, 0), (a, 0, b), (0, a, b)$ são sempre LI's se $a \neq -b$.

9. Considere $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vetores linearmente independentes. Os vetores
$$A \cdot \mathbf{v}_1, \dots, A \cdot \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$$
são necessariamente linearmente independentes?

10. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:
    (a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s \rangle$, então $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s \rangle$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
    (b) Isso ainda vale se substituirmos intersecção por união?