**MAT 1200: Álgebra Linear I**
**Prova P4 — 2014.1: 7 de junho de 2014**

Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa e de preferência sucinta. As respostas podem ser escritas a lápis. Tempo: 1h50.

Nome: ____________________

Matrícula: ____________________ Turma: ____________________

☐ favor corrigir essa prova ☐ favor NÃO corrigir essa prova

| Questão | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Pontos | 3 | 4 | 4 | 11 |
| Correção | | | | |

1. A questão 4c da P1 era: "Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são vetores linearmente independentes e que $\mathbf{v} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}$ são linearmente independentes? Justifique.". A resposta do Joãozinho foi:

| |
|---|
| Como $\mathbf{v} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, $\mathbf{v}$ não é combinação linear de $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Assim, como $\mathbf{v}$ não é redundante em $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}$, esse conjunto é linearmente independente. |

*1 pto* (a) Escreva a definição de $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

*1 pto* (b) Qual hipótese do enunciado da questão 4c o Joãozinho não usou? Dê um exemplo onde, sem essa hipótese, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}\}$ são linearmente dependentes.

*1 pto* (c) Escreva uma demonstração correta e completa que os vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}\}$ são linearmente independentes começando por:
"Sejam escalares $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$ tais que $\alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$" .

2. Considere a função $D\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por:

$$D(a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3) = b + 2\,c \cdot x + 3\,d \cdot x^2 \quad .$$

(Observe que $D$ é a transformação que deriva de um polinômio).

*1 pto* (a) Mostre que $D$ é uma transformação linear.

*1 pto* (b) Escreva a matriz de $D$ na base canônica $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$.

*1 pto* (c) Determine uma base para o núcleo de $D$ e uma base para a imagem de $D$.

*1 pto* (d) $D$ é diagonalizável? Justifique.

3. Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dois vetores ortogonais de $\mathbb{R}^2$, ambos com norma 1.

*1 pto* (a) Mostre que, se $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{v}_1 + \beta \cdot \mathbf{v}_2$, então $\alpha = \langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{v}_1 \,\rangle$.

*1 pto* (b) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Escreva a matriz de $T$ na base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ usando os produtos internos de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$.

*1 pto* (c) $T$ é chamada de *autoadjunta* se, para quaisquer dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,vale:

$$\langle\, T(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \,\rangle = \langle\, \mathbf{u} \,|\, T(\mathbf{v}) \,\rangle \quad .$$

Mostre que se $T$ é autoadjunta, então a matriz de $T$ na base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é simétrica: $([T]_\beta)^{\mathrm{T}} = [T]_\beta$.

*1 pto* (d) Verifique que $T(x, y) = (\,y\,, x\,)$ é autoadjunta, mas que sua matriz na base $\gamma = \{\,(2\,, 0)\,,\,(0\,, 1)\,\}$ não é simétrica.