MAT 1200: Álgebra Linear I
Prova P3 — 2014.1: 24 de maio de 2014

Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa e de preferência sucinta. As respostas podem ser escritas a lápis. Tempo: 1h50.

Nome: ______________________________

Matrícula: ______________________ Turma: ______________________

Questão	1	2	3	4	Total
Pontos	1½	3	3½	2	10
Correção					

1. À questão "Calcule as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ na base ortogonal

$$\delta = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$." Joãozinho respondeu:

> As coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ são os números reais α_1, α_2 e α_3 tais que
>
> $$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3.$$
>
> Como esta base é ortogonal, temos que
>
> $$\begin{aligned} \alpha_1 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{v}_1 \rangle = 1. \\ \alpha_2 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{v}_2 \rangle = 2. \\ \alpha_3 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{v}_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$
>
> Portanto, as coordenadas do vetor $(1, 1, 1)$ na base δ são 1, 2 e 0, respectivamente.

1 pto (a) Joãozinho está errado pois $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$. Indique qual foi o erro que Joãozinho cometeu e explique a sua afirmação.

½ pto (b) Enuncie a definição de *complemento ortogonal* de um subespaço vetorial H de $\mathbb{R}^n$.

2. Verdadeiro ou falso? Forneça uma justificativa para sua resposta.

1 pto (a) Se $\mathbb{R}^n$ é soma direta dos subespaços H e W, então W é o complemento ortogonal de H. Noutras palavras, se $\mathbb{R}^n = H \oplus W$, então $W = H^\perp$.
(Lembre: $\mathbb{R}^n = H \oplus W$ se, e somente se, $\mathbb{R}^n = H + W$, $H \cap W = \{0\}$.)

1 pto (b) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma projeção sobre a reta $\mathscr{r} := \langle (11, -1, 7, 4) \rangle$. Sejam $[T]_\beta$ a matriz de T numa base β de $\mathbb{R}^4$ e $P \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ uma matriz invertível. Então, $\det\left(P\,[T]_\beta\,P^{-1}\right) = 0$.

1 pto (c) A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a reflexão (espelhamento) em relação ao plano π e

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de T na base $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1 pto (a) Da matriz $[T]_\gamma$, calcule os autovalores e o autoespaço associado ao maior autovalor.

1 pto (b) Sejam $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$. Encontre valores numéricos para a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e b_3 que garantam que $\pi = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.

½ pto (c) Sabendo que $\delta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ cujos elementos são autovetores de T, sendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ associados ao mesmo autovalor, encontre $[T]_\delta$.

1 pto (d) Dê um exemplo de um subespaço vetorial H de $\mathbb{R}^3$ tal que as duas seguintes condições sejam satisfeitas:

- H não é autoespaço de T, mas é invariante por T.
- $\dim H = 2$.

4. Nesta questão vamos trabalhar com a seguinte afirmação:

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear tal que para quaisquer dois vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfaz:

$$\langle T(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | T(\boldsymbol{v}) \rangle$$

e $\underline{\boldsymbol{w}_1 \text{ e } \boldsymbol{w}_2 \text{ são autovetores de } T \text{ associados respectivamente aos autovalores } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2}$ com λ_1 diferente de λ_2, então $\underline{\boldsymbol{w}_1 \text{ e } \boldsymbol{w}_2 \text{ são ortogonais}}$.

1 pto (a) Defina os conceitos que aparecem sublinhados na afirmação anterior.

1 pto (b) Prove que dita afirmação é verdadeira.