MAT 1200: Álgebra Linear I
Prova P2 — 2014.1: 12 de Abril de 2014

Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa e de preferência sucinta. As respostas podem ser escritas a lápis. Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos. Tempo: 1h50.

Nome: ____

Matrícula: ____________________________ Turma: __________

Questão	1	2	3	Total
Pontos	3	4	3	10
Correção				

1. À questão "Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $L(1,0) = (1,0)$ e $L(1,1) = (0,0)$. Encontre a matriz de L associada a base canônica de $\mathbb{R}^2$", Joãozinho respondeu:

> Denotemos por β a base $\{(1,0),(1,1)\}$ e por γ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como $L(1,0) = (1,0)$ e $L(1,1) = (0,0)$, podemos escrever L na base β:
>
> $$[L]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
>
> Temos que $[L]_\gamma = P\,[L]_\beta\,Q$, onde $P = [I]_{\beta\leftarrow\gamma}$ e $Q = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}$ são as matrizes de mudança de bases de γ para β e de β para γ, respectivamente. Para achar P, expressamos cada vetor da base γ como combinação linear dos vetores de β: $(1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1)$ e $(0,1) = -1\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1)$. Assim,
>
> $$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
>
> Analogamente, expressamos os vetores de β como combinação linear dos vetores de γ obtemos: $(1,0) = 1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)$ e $(1,1) = 1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$. Consequentemente,
>
> $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
>
> e podemos concluir que:
>
> $$[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1 pto (a) Escreva a definição de transformação linear.

1 pto (b) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e considere $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ e $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ bases de U e V, respectivamente. Qual é a definição do elemento na linha i e coluna j da matriz $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$ que representa T nas bases β e γ?

1 pto (c) A resposta do Joãozinho está errada pois $L(1, 1)$ deveria dar $(0, 0)$. Indique qual foi o erro que Joãozinho cometeu e explique a sua afirmação.
NB: Esse item não pede a resposta certa, pede para explicar ao Joãozinho o seu erro.

2. Existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ satisfazendo simultaneamente:
   - Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $T(1, 0, -1) = \alpha \cdot T(1, 0, -1)$.
   - Os vetores $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, -1)$ são transformados por T no mesmo vetor de $\mathbb{R}^4$.
   - $T\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
   - $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 2$.

1 pto (a) Encontre bases para o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

1 pto (b) Encontre a expressão de $T(x, y, z)$.

1 pto (c) Dê um exemplo de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(S + \mathrm{Im}(T)) = 3$. Justifique a sua escolha.

1 pto (d) Mostre que todo plano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\dim(\pi \cap \mathrm{Nuc}(T)) = 1$ é transformado por T em uma reta de $\mathbb{R}^4$.

3. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ duas transformações lineares injetivas.

1 pto (a) Mostre que $n \leq m \leq k$.

1 pto (b) Prove que $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é também injetiva.

1 pto (c) Prove que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$ são vetores linearmente independentes, então os vetores $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \mathbb{R}^m$ são também linearmente independentes.

Sugestão para apresentação das demonstrações:

- Escreva a definição das hipóteses.
- Escreva os argumentos usados (geralmente entre 2 e 5), sendo esses lemas e teoremas do livro ou visto em aula (verificando que esses argumentos aplicam).
- Junte o resultado dos argumentos para chegar na conclusão do enunciado.