MAT 1200: Álgebra Linear I
Prova P1 — 2014.1: 15 de Março de 2014

Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa e de preferência sucinta. As respostas podem ser escritas a lápis. Tempo: 1h50.

Nome: ____

Matrícula: ____

Questão	1	2	3	4	Total
Pontos	2	3	2	3	10
Correção					

1. À questão "Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 4, -4)$ são linearmente independentes", Joãozinho respondeu:

> Uma combinação linear
>
> $$a \cdot (1, -1, 2) \ + \ b \cdot (2, 2, 0) \ + \ c \cdot (0, 4, -4) \ = \ (0, 0, 0) \ ,$$
>
> com coeficientes a, b e c e que gera o vetor nulo conduz ao sistema de equações lineares
>
> $$\begin{cases} \ \ a + 2\,b \qquad = 0 \\ -a + 2\,b + 4\,c = 0 \\ 2\,a \qquad - 4\,c = 0 \end{cases} .$$
>
> Resolvendo o sistema, obtemos $a = -2\,b$ e $c = -b$. Para $a = 0$, obtemos $b = 0$, de onde se deduz que $c = 0$. Assim, os coeficientes da combinação linear são todos nulos e concluímos que os vetores são linearmente independentes.

½ pto (a) O que significa dizer que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são linearmente independentes?

1½ ptos (b) A resposta do Joãozinho está errada pois $\mathbf{v}_3 = -2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Indique qual foi o erro que Joãozinho cometeu e explique a sua afirmação.

2. Considere o sistema de equações lineares (1) abaixo:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & & & & = & 2 \\ 2\,x_1 & +\,x_2 & & & = & -1 \\ x_1 & -\,x_2 & -\,x_4 & & = & 0 \\ -x_1 & & +\,x_4 & -\,x_6 & = & -2 \end{array}\right. . \tag{1}$$

½ pto (a) Denotando o vetor de incógnitas por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

expresse o sistema (1) dado acima na forma matricial $A \cdot \mathbf{x} = b$.

½ pto (b) Exiba duas expressões que representem operações elementares sobre as linhas da matriz A do sistema, tais que você consiga zerar as entradas $a_{2,2}$ e $a_{4,4}$ de A, respectivamente.

1 pto (c) Encontre todas as soluções $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ do sistema (1) acima.

1 pto (d) O conjunto de todas as soluções do sistema (1) acima é uma reta em $\mathbb{R}^6$? Justifique a sua resposta.

3. Considere as retas $r = \{(-1 + 2t, t, \alpha - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $\ell = \{(2s, \alpha + s, 3s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

1 pto (a) Existe um único valor real da incógnita α para o qual as retas r e ℓ se intersectam em um ponto $P \in \mathbb{R}^3$. Calcule esse valor de α e determine o correspondente ponto P de interseção das retas r e ℓ.

1 pto (b) Se $\alpha = 0$, existe um plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contendo ambas as retas r e ℓ? Justifique.

4. Considere os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ e denote por $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ o espaço gerado por estes vetores.

1 pto (a) Mostre que se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$, então $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$, quaisquer que sejam os números reais α e β.

1 pto (b) Supondo que $m > 3$, prove que se $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, então $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$.

1 pto (c) Suponha que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são vetores linearmente independentes e seja $\mathbf{v} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}$ são linearmente independentes? Justifique.