MAT1153 / 2008.1 — LISTA DE EXERCÍCIOS : REGIÕES DO ESPAÇO E INTEGRAIS TRIPLAS

(1) Fazer os seguintes exercícios do livro texto. Exercs da seção 2.1.4: Exercs 1(b), 4(a), 4(b).

(2) Fazer exercícios 3:(b), (c), (d) da secão 4.1.4 pg 99 do livro texto.

(3) Fazer exercícios 2: (b), (c), 3:(b), (c), (d) da secão 4.2.5 pg 106 do livro texto.

(4) Fazer exercícios, 2:(a),(b), 3:(b), (d) 4:(b) da seção 5.2.3 pgs 121, 122 do livro texto.

(5) Fazer exercícios 1, 2, 5 da seção 5.3.4 pg 124 do livro texto.

(6) Fazer exercícios 1:(b), (c), 2(a), (b), (c), 3, da seção 5.4.3, pg 132 do livro texto.

(7) Fazer exercícios 1, da seção 5.5.3 pg 137 do livro texto.

(8) Fazer exercícios 2, 3, 5,6,7,8 da seção 5.6 pg 138 do livro texto.

(9) Considere as superfícies dadas abaixo. Determine: Interseção com os planos coordenados, xy, xz, yz. Estude as interseções com os planos $z = c, c \in \mathbb{R}$, quando tais interseções forem círculos. Identifique as superfícies de revolução (e seus eixos). Explicite também os planos de simetria π das superfícies: Isto é, reflexão em π, deixa a superfície invariante, levando uma "metade" desta na outra "metade". Lembrando de Clculo II, escreva a equao do plano tangente ao grfico quando pedido. Esboce um desenho de cada superfície com *apuro*.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   (b) $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$.
   (c) $x^2+y^2-z^2 = -1$ (hiperbolide com 2 folhas. Veja Figura 1). Escreva a equao do plano tangente ao hiperbolide no ponto $(2, 0, \sqrt{5})$.

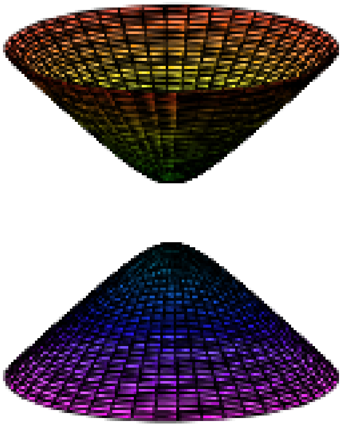

Figura 1: Hiperbolide de 2 folhas

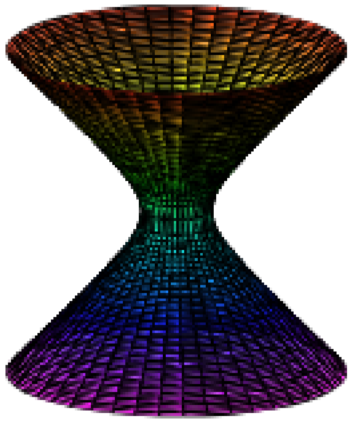

Figura 2: Hiperbolide de 1 folha

Figura 3: Sela

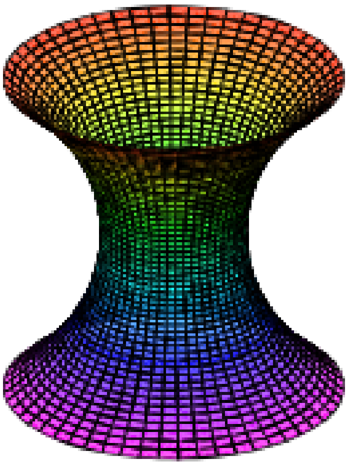

Figura 4: Catenide

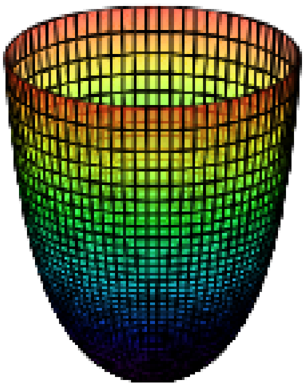

Figura 5

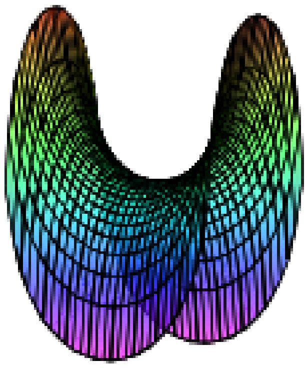

Figura 6: Superfcie de Scherk

(d) $x^2 + z^2 - y^2 = -1$.
(e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hiperbolide com 1 folha. Veja Figura 2).
(f) $(x-1)^2 + (y+1)^2 - (z-3)^2 = -1$.
(g) $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$.
(h) $x^2 + y^2 = 9z^2$.
(i) $x^2 + z^2 = 9y^2$.
(j) $x^2 - y^2 = z$.
(k) $y^2 = z$ Escreva a equao do plano tangente ao grfico no ponto $(1, 1, 1)$.
(l) $z = xy$ (Sela. Veja Figura 3). Escreva a equao do plano tangente ao grfico no ponto $(1, 1, 1)$.
(m) $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (catenide. Veja Figura 4). Escreva a equao do plano tangente ao grfico no ponto $(1, 1, \operatorname{arccosh}(\sqrt{2}))$.
Lembrete: $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.
(n) $z = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Procure encontrar um cilindro para o qual a superfcie "converge" quando $z \to \infty$. Veja Figura 5.
(o) $z = \log\left(\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ $-\pi/2 < y < \pi/2$.
(Superfcie de Scherk. Veja Figura 6).

(10) Considere as superfícies D, D_1 e S_1 definidas a seguir (esboce um desenho) :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leqslant 9,\ z = 0\}$$
$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y + 7,\ x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant x + y + 7,\ x^2 + y^2 = 9\}$$

Considere $S := D \cup S_1 \cup D_1$ a superfície fechada, que é fronteira de um sólido $U \subset \mathbb{R}^3$.
(a) Desenhe corretamente S.
(b) Escreva o volume de U usando coordenadas retangulares. Escreva o volume de U usando coordenadas polares.
(c) Calcule $\displaystyle\iint_D (x + y + 7)\left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{1}{10}\right] dxdy$. Resposta: $189\pi/10$. *Sugestão*: Use coordenadas polares

(11) Considere U a região de $\mathbb{R}^3$ que está contida na interseção das seguintes três regiões. Região entre os planos $z = 2$ e $z = -2$, região no interior do cone $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ (i.e região contendo o

eixo de revolução) e região no interior do semi-espaço dado por $\{y \geqslant 0\}$. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U.
(b) Descreva U usando desigualdades.
(c) Calcule $I := \iiint_U f(x,y,z)dxdydz$ como soma $I = \iiint_{U_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{U_2} f(x,y,z)dxdydz$ de duas integrais triplas em duas regiões U_1 e U_2 de $\mathbb{R}^3$ de mesmo volume, sendo que U_1 está contida no semi-espaço superior $\{z \geqslant 0\}$.
(d) Deduza que $I = \frac{16\pi}{5}$.
(e) Usando a mesma região de integração do item precedente re-escreva a integral tripla $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$,
  (i) usando integrais iteradas nas coordenadas cartesianas ou retangulares, *de duas maneiras distintas.*
  (ii) usando coordenadas cilíndricas.
(f) Usando a mesma região U anterior fazendo um cálculo explícito mostre que para $f(x,y,z) = xy\operatorname{sen} z$, a integral tripla $\iiint_U f(x,y,z)dxdydz = 0$. Idem para $f(x,y,z) = x^2y^2z$. Deduza destes exemplos um argumento geométrico, que seja aplicado a situações mais gerais, exibindo novos exemplos em que $\iiint_U f(x,y,z)dxdydz = 0$.
(g) Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqslant z \leqslant 2$. Seja $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Deduza, usando um argumento que a integral tripla $\iiint_U f(x,y,z)dxdydz = \frac{16\pi}{5}$, independente de a e b.

(12) Seja U a região do espaço no primeiro octante interior à esfera de raio 2 centrada na origem. Seja $f(x,y,z) = z^2$.
(a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U.
(b) Deduza que $\iiint_U f(x,y,z)dxdydz = \frac{16\pi}{15}$.
(c) Compare o resultado precedente com a integral da mesma função sobre *toda a bola* de raio 2 centrada na origem explicando o resultado, por um argumento geométrico.

(13) Considere U a região do espaço dada por

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

(a) (i) Escreva a fórmula integral que expresse o volume V da região U-*usando coordenadas cilíndricas.*

(ii) Escreva a fórmula integral que expresse o volume V da região U-*usando coordenadas esféricas*.

(b) Calcule o volume V de U, *usando integral tripla* (o sistema de coordenadas é de sua escolha), fazendo todos os cálculos. Resposta: $V = \dfrac{27\pi}{6} = \dfrac{9\pi}{2} \cdot$ (1).

(c) Seja $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ o centróide da região U. Calcule $\overline{x}$, escrevendo todos os cálculos. Resposta: $\overline{x} = 9/8$.

(14) Idem exercício anterior considerando a região U dada por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, z \leqslant 3/\sqrt{2}\}$$

(15) Idem exercício anterior considerando a região U dada por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leqslant 9, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

(16) Seja

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\, dzdydx$$

(a) Determine o domínio de integração U da integral tripla (na forma acima de uma integral iterada (Fubini)), usando desigualdades.

(b) Calcule o volume de U. Agora, dado λ um número real positivo, seja $U_\lambda := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u = \lambda x, v = \lambda y, w = \lambda z, \ (x, y, z) \in U\}$

(i) Calcule o volume de U_λ *em termo* do volume de U e justifique sua resposta usando um argumento geométrico.

(ii) Seja

$$I_\lambda = \iiint_{U_\lambda} w\sqrt{u^2+v^2}\, dudvdw$$

Calcule I_λ, *em termo* de I, fazendo uma mudança de variáveis conveniente (não precisa usar o cálculo de I).

(iii) Generalize, usando suas palavras e um argumento com base no que foi feito acima, no caso geral em que U é uma região qualquer fechada do espaço.

(c) Calcule I.

(17) Seja U a região no interior da esfera de raio a satisfazendo $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ (primeiro octante). Considere $f(x,y,z) = xyz(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ e $I = \iiint_U f(x,y,z)dxdydz$.
  (a) Escreva I usando integrais iteradas nas coordenadas cartesianas ou retangulares.
  (b) Escreva I usando coordenadas esféricas.
  (c) Calcule I. Resposta: $I = a^5/40$.
  (d) Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Calcule sem fazer nova conta $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$.
  (e) Seja $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$. Calcule sem fazer nova conta, $\iiint_W f(x,y,z)dxdydz$.

(18) Considere $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt[4]{4x^2+4y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{3-x^2-y^2}\}$.
  (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U.
  (b) Escreva U usando coordenadas cilíndricas.
  (c) Escreva o volume de U usando integrais iteradas usando coordenadas cartesianas ou retangulares.
  (d) Escreva o volume de U na forma $\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\int_{g_1(r)}^{g_2(r)} r dz d\theta d\rho$.
  (e) Escreva o volume de U na soma de duas integrais da forma $2\pi\int_{z_1}^{z_2}\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} r dr dz$.
  (f) Escreva o volume de U usando cordenadas esfricas.
  (g) Calcule o volume de U. Resposta: $\mathrm{vol}(U) = 2\pi(\sqrt{3} - \frac{16}{15}\sqrt{2})$.

(19) Seja região do espaço $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \leqslant 1\}$. Seja $g(x,y,z)$ uma função real suave. Considere a integral tripla
$$I = \iiint\limits_U g(x,y,z)dV.$$
  (a) Escreva a integral tripla I na forma $\displaystyle\int\limits_a^b \int\limits_{R(z)} dxdy\, dz$, onde a, b são constantes a determinar e $R(z)$ é uma região plana a determinar.
  (b) Expresse I usando coordenadas cilíndricas (r, θ, z).
  (c) Escreva I usando obrigatoriamente coordenadas esféricas.
  (d) Calcule o volume de I testando ambas fórmulas obtidas em (b) e (c) acima. Resposta: 9π.

(20) Seja U a região delimitada pelos planos $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$ e $2x-z=1$.
 (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U.
 (b) Calcule a integral
 $I=\iiint_U (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)dxdydz$. Resposta: $I=\frac{1}{180}$.

(21) Calcule o volume da porção, digamos U, da bola fechada $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=2y$, desenhando corretamente a região determinada. Resposta: $\mathrm{vol}\,(U)=\frac{2}{3}\pi 2^3-\frac{64}{9}$.

(22) Seja U a região delimitada pelo elipsóide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1, a\geqslant b\geqslant c>0$.
 (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U.
 (b) Seja $f(x,y,z)=\left(1-x^2/a^2-y^2/b^2-z^2/c^2\right)^{3/2}$.
 Calcule $\iiint_U f(x,y,z)dxdydz$. Resposta: $I=\frac{1}{8}\pi^2 abc$.
 (a) Deduza que a altura $\overline{z}$ do centróide da região delimitada pela esfera de raio a centrada na origem, contida no primeiro octante $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ é $\overline{z}=\frac{3}{8}a$. Em seguida usando um argumento geométrico, calcule as outras coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do centróide.
 (b) Seja dado o número real λ. Seja $\overline{z}$ a *altura* do centróide de U. Seja $U_\lambda=\{(u,v,w);\, u=\lambda x+1, v=\lambda y+2, w=\lambda z+1/2,\ (x,y,z)\in U\}$. Determine λ em *termo* de $\overline{z}$, e de a de maneira que a terceira coordenada $\overline{w}$ do centróide de U_λ seja igual a 1.

(23) Considere a região $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 7\leqslant z\leqslant \dfrac{x-1+y-2}{(x-1)^2+(y-2)^2}+7,\ x\geqslant 1, y\geqslant 2,\ 1\leqslant x-1+y-2\leqslant 2\}$. Elabore um desenho esquemático da região U e calcule o volume V de U. Resposta: $V=\pi/2$.