MAT1153 / 2008.1 — LISTA DE EXERCÍCIOS : REGIÕES DO PLANO, INTEGRAIS DUPLAS E VOLUMES

(1) Fazer os seguintes exercícios do livro texto. Exercs da seção 1.1.4: 1(d), 1(f), 1(h), 1(i), 1(j). 2(b), 2(d)

(2) Fazer os seguintes exercícios do livro texto. Exercs da seção 1.2.5: 2(f), 4(c), 4(d). 5(a), 5(b), 5(e).

(3) Considere as curvas definidas implicitamente pelas equações cartesianas abaixo. Determine a equação *polar* destas, nos intervalos indicados, fazendo um desenho. Além disso, lembrando do Cálculo II, determine, em cada caso, vetores normais às curvas escolhendo três pontos quaisquer destas.

(a) (Lemniscata de Bernoulli). $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$
$(-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$

(b) (Limaçon de Pascal). $(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2$
$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

(c) (Cardióide) $(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$
$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

(4) Considere a regiões do plano $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leqslant y \leqslant x^2 + 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leqslant y \leqslant -x/3 + 7/3,\ 1 \leqslant x \leqslant 4\}$. Seja $R := R_1 \cup R_2$.

Considere a integral dupla: $I = \displaystyle\iint_R F(x,y)\,dxdy$

(a) Esboce um desenho de R. Escreva, sem fazer cálculos, uma soma de duas *integrais iteradas*, usando integrais do tipo $\displaystyle\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dydx$, que seja igual a I.

(b) Escreva, sem fazer cálculos, uma *integral iterada*, usando integrais do tipo $\displaystyle\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dxdy$, que seja igual a I.

(c) Calcule a área de R e calcule a coordenada $\overline{y}$ do centróide de R. Resposta: $A =$ área$(R) = \frac{11}{6}, \overline{y} = 73/55$.

(5) Considere a região R do plano xy cuja fronteira dada por $R := [1/2, 1] \times [1, 3]$. Calcule

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

onde

(a) $f(x,y) = -x \log x \cos(\pi y) \text{sen}^2(\pi y)$
(b) $f(x,y) = \frac{2y}{1+y^2}\, x \cos(\pi x)$
(c) $f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, \frac{e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$
(d) $f(x,y) = 2xe^x \log y$
(e) $f(x,y) = \frac{y^3+y^2-y}{y+1}\, \frac{1}{2x+10}$
(f) $f(x,y) = e^y \text{sen}\, y\, x^4 e^{-7x^5}$.
(g) $f(x,y) = y\sqrt{y+1}\, \text{sen}\, x\, \cos^2 x$.

(Respostas (a): 0 (b): $-\log 5(1/(2\pi)+1/\pi^2)$ (c): $2\sqrt{3}(e^{-1} - e^{-\sqrt{3}})$ (d): $(3\log 3 - 2)\sqrt{e}$ (e): $(20/3 + \log 2)\log(12/11)/2)$

(6) Em cada sub-item do item anterior, interprete a integral dupla em termos de *volume de uma região U do espaço*, determinando rigorosamente U usando inequações.

(7) Considere as regiões U_1, U_2 do espaço dadas por:

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant 9 - x^2 - y^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant y\}$$
$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant 9 - (x-1)^2 - (y-3)^2\}$$

(a) Escreva o *volume* V_1 da região U_1 usando integrais iteradas, via coordenadas cartesianas ou retangulares usuais x, y.
(b) Escreva o *volume* V_1 da região U_1, usando coordenadas polares e *calcule* V_1.
(c) Calcule o volume V_2 de U_2. Resposta: $V_1 = 81\pi/16$, $V_2 = 81\pi/2$. Sugestão: use os itens precedentes.

(8) Considere a região U do espaço dada por $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant y^2 + x;\ 0 \leqslant y \leqslant \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
(a) Escreva o volume de U usando uma *integral iterada nas variáveis x, y*.
(b) Calcule o volume de U. Resposta: volume$(U) = 4/9 + \pi$.
(c) Seja $W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant y^2 + x;\ -\text{sen}\, x \leqslant y \leqslant \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$. Calcule o volume de W. *Sug*: Faça o mínimo de contas possível, justificando corretamente a sua resposta.

(9) Considere a região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2}\}$. Seja A o número real positivo determinado pela integral dupla : $A = \iint_R \left[4 - (x^2+y^2)^4\right] dxdy$. Calcule as seguintes integrais duplas em *termo* de A. Não é preciso calcular A, mas é preciso dar uma justificativa matemática correta.

(a) Usando desigualdades, determine $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $A = \text{volume}(U)$.

Calcule $I_1 = \iint\limits_{R_1} \left[4 - \left((x-1)^2 + (y+1)^2\right)^4\right] dxdy$, onde, $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant \sqrt{2}\}$. Justifique sua resposta.

(b) $I_2 = \iint\limits_{R_2} \left[4 - (x^2+y^2)^4\right] dxdy$, onde $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2},\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$. Justifique sua resposta.

(c) $I_3 = \iint\limits_{R} \left[7 - (x^2+y^2)^4\right] dxdy$. Justifique sua resposta.

(10) Determine o volume do sólido delimitado pelos parabolóides $z = 4x^2 + 2y^2$ e $z = 12 + x^2 - y^2$. Idem com respeito aos parabolóides $z = x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - y^2$ (Respostas: 24π e 4π).

(11) Seja $V := 8 \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16 - x^2}\, dydx$. Interprete V como sendo o volume de uma certa região do espaço delimitada por dois cilindros. Calcule V (Resposta: 1024/3). Veja Figura 7.

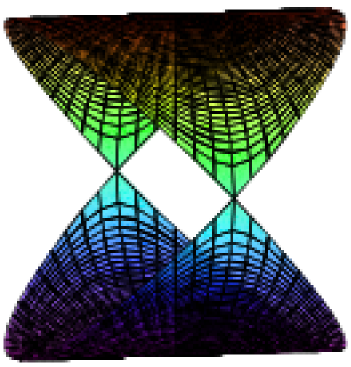

Figura 7

(12) Considere a região R do plano delimitada pelas parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 9$.
  (a) Calcule a área de R (Resposta: 64/3).
  (b) Calcule o centróide de R (Resposta: 5).
  (c) Calcule o valor médio da função $f(x, y) = x^2$ em R (Resposta: 12/5).

(13) Considere as regiões R_1, R_2 do plano dadas por:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 \leqslant y^2\}$$

Seja $\mathcal{R} := R_1 \cap R_2$.
Considere a integral dupla $I := \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dxdy.$
  (a) Faça o desenho da região $\mathcal{R}$. Escreva, usando *coordenadas retangulares* x, y, sem fazer cálculos, uma *integral iterada*, que seja igual a I.
  (b) Escreva sem fazer cálculos, usando *coordenadas polares* uma fórmula, que seja igual a I.
  (c) Calcule I. Resposta: $\pi/4 - \sqrt{2}/2$.

(14) Seja $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant y,\ x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\}$.
  (a) Determine R usando coordenadas polares. Sug: esboce um desenho.
  (b) Escreva a integral dupla $I = \displaystyle\iint_R 4(x^2 + y^2)\, dxdy$, *usando coordenadas polares*.
  (c) Usando que $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta d\theta = 3\pi/32 + 1/4$, deduza que $I = 3\pi/2 + 4$

(15) Considere U a região sólida interior à esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, que está também no interior do cilindro dado por $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
  (a) Determine U usando desigualdades e faça um desenho da região.
  (b) Calcule o volume de U (Resposta: $128\pi/3 + 512/9$).

(16) Considere a região A delimitada pelo cardióide dado em coordenadas polares por $r = 2 + \cos\theta$. Calcule a área da região

R obtida removendo-se de A o disco de raio $1/2$ centrado na origem. (Resposta: $4\pi + \pi/4$). Veja Figura 8.

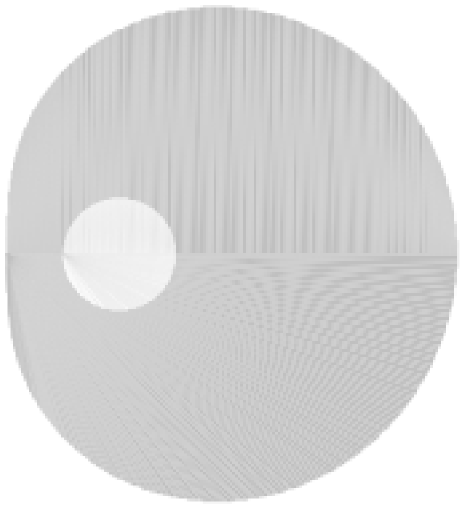

Figura 8

(17) Considere a região A delimitada pelo cardióide dado em coordenadas polares por $r = 1 + \cos\theta$. Calcule a área da região R obtida removendo-se de A, a parte que está contida em A do disco de raio $1/2$ centrado na origem .

(18) Seja R_1 a região do plano dada em coordenadas polares por $0 \leqslant r \leqslant \operatorname{sen} 2\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Veja Figura 9.
Considere $R := R_1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geqslant 3/4\}$. Veja Figura 10.

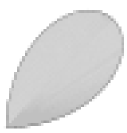

Figura 9

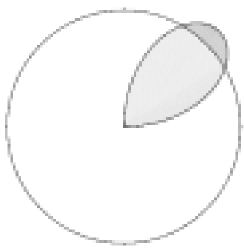

Figura 10

(a) Seja $I := \iint\limits_R F(x,y)dxdy$. Escreva I usando coordenadas polares. OBS: (Mini-tabela). $\operatorname{sen}\pi/4 = \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2, \operatorname{sen}\pi/6 = \cos\pi/3 = 1/2, \operatorname{sen}\pi/3 = \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$.

(b) Calcule a área de R. *Resposta*: área$(R) = -\pi/48 + \sqrt{3}/16$.

(19) Calcule I determinando as regiões de integração e interpretando o resultado

$$I = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=x}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx + \iint\limits_R \sqrt{1-x^2-y^2/4}\,dxdy$$

onde R é a região do plano dada por $x^2+y^2/4 \leqslant 1$ (Resposta: $2\sqrt{2}-2+2\pi/3$).

(20) Seja $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \leqslant 1\}$. Calcule o volume da região U de $\mathbb{R}^3$ delimitada pelo gráfico da funções $z = x^2+y^2+1$ e $z = 2xy$ restritas à região R (Resposta: $51\pi/2$).