MAT1153 / 2008.1 — LISTA DE EXERCÍCIOS : CAMPOS CONSERVATIVOS, INTEGRAIS DE LINHA, TRABALHO E TEOREMA DE GREEN

OBS: *Faça os exercícios sobre campos conservativos em primeiro lugar.*

(1) Fazer exercícios 1:(c), 2:(b),(c), (e), 3, 5, 6, 7, 8 da seção 7.1.3 pgs 162, 163 do livro texto.

(2) Fazer exercícios 1: (c), 2 da seção 7.2.4, pg 167 do livro texto.

(3) Fazer exercícios 2, 4, 5:(b), (c) da seção 7.3.3 pg 171 do livro texto.

(4) Fazer exercícios 1: (b), (c), (d), 2:(b), (c), (d) da seção 8.2.3 pg 178 do livro texto.

(5) Fazer exercícios 4:(b), 5, 6, 7 da seção 8.3.4 pg 181 do livro texto.

(6) Fazer exercícios 1, 4, 5, 7, 8, 9 da seção 8.4.4 pgs 186, 187 do livro texto.

(7) Fazer exercícios 1), 2), 3), 5)(b), 6), 8) (veja neste exercício a noção de *fluxo de um campo de vetores F através de uma curva fechada C*) da seção 8.5.2, pgs 192, 193,194 do livro texto.

(8) Fazer exercícios 1), 4) da seção 8.6.3 pgs 198, 199 e 6), 9), 10), 11), 12) da seção 8.7 pgs 198,199, 200 do livro texto.

(9) Determine, *sem calcular explicitamente o potencial*, se os campos F abaixo são conservativos ou não. Em seguida à verificação, no caso afirmativo, calcule explícitamente os potenciais ou funções potenciais associada f.

(a) $F(x,y) = \left(\dfrac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{x(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \right).$

Resposta: $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + C, C \in \mathbb{R}.$

(b) $F(x,y) = \left(\ln(y^2+1) + y^3 + y, \frac{2y(x-1)}{y^2+1} + \arctan x\right)$.

(c) $F(x,y) = \left(\ln(y^2+1), \frac{2y(x-1)}{y^2+1}\right)$.
Resposta: $f(x,y) = (x-1)\ln(y^2+1) + C$.

(d) $F(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$.
Resposta: $f(x,y,z) = xy + yz + zx + C$.

(e) $F(x,y,z) = (y+z, x-z, x+y^3)$.

(f) $F(x,y) = (7+y^2-3x^2, e^y + 2xy + 1)$.
Resposta: $f(x,y) = -x^3 + xy^2 + 7x + e^y + y + C$.

(g) $F(x,y,z) = (\cos y + 2xy^2z^2, -x \operatorname{sen} y + e^z + 2yx^2z^2, ye^z + 2y^2x^2z)$.
Resposta: $f(x,y,z) = x\cos y + ye^z + x^2y^2z^2 + C$.

(h) $F(x,y,z) = (\cos y + yz, -x\operatorname{sen} y + e^z + xz, ye^z + xy + h(z))$, para $h(z) = \operatorname{sen} z + z\cos z$, $h(z) = \operatorname{sen}^4 z \cos z$, e $h(z) = e^z \operatorname{sen}(z) + z^2 e^{-2z^3}$. Conclua um resultado para uma dada $h(z)$ geral.

(10) Considere o campo F em $\mathbb{R}^2$ dado por
$F(x,y) = (8+y^2-3x^2, e^y + 2xy + ye^{-2y})$.

(a) Determine se $F(x,y)$ é conservativo ou não.

(b) Encontre *todas* as funções potenciais associadas à F (caso existam); *verificando por um cálculo direto a sua resposta.*
Resposta: $f(x,y) = 8x + xy^2 - x^3 + e^y - \dfrac{ye^{-2y}}{2} - \dfrac{e^{-2y}}{4} + C, C \in \mathbb{R}$.

(c) (i) Seja $F(x,y,z)$ um campo suave dado por
$F(x,y,z) = (x+y+z+e^{zh(z)}, x+y+z, x+y+xe^{zh(z)})$.
Determine uma função $h(z)$, caso seja possível, para a qual $F(x,y,z)$ é conservativo.

(ii) Seja $G(x,y,z)$ um campo suave dado por
$G(x,y,z) = (x+y+z+h(z), x+y+z, x+y+xh(z))$.
Determine todas funções $h(z)$, caso seja possível, para as quais $G(x,y,z)$ é conservativo.

(iii) Seja $W(x,y,z)$ um campo suave dado por
$W(x,y,z) = (2xy, x^2 + z\cos(yz), y\cos(yz))$. Determine todos os potenciais de W, caso existam.

$F(x,y,z) = \left(ye^{xy}, xe^{xy} + \cos z, \dfrac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} - y\operatorname{sen} z\right)$.
Determine se $F(x,y,z)$ é conservativo ou não. Caso afirmativo, calcule todos os potenciais $f(x,y,z)$ associados ao campo $F(x,y,z)$.

(11) Considere a superfície D_1 definida a seguir (esboce um desenho) :

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y + 7,\ x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

Considere C_1 a curva do bordo (fronteira) da superfície D_1 (positivamente orientada). Exiba uma parametrização de C_1, explicitando o domínio. Calcule o vetor velocidade e determine a sua norma. Escreva uma fórmula, usando uma integral definida numa variável real, que dá o comprimento da curva.

(12) Analisando cada curva parametrizada plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ (onde I é um intervalo da reta) abaixo, determine o vetor velocidade (ou vetor tangente) $V(t)$, quando $V(t) \neq 0$ determine um vetor unitário normal n (i.e $n \cdot V = 0, \|n\| = 1$) e determine uma curva plana C, estabelecendo a relação entre x e y, que, contenha o traço ou imagem de α (i.e $\alpha(I) \subset C$). Determine os pontos (caso existirem) onde a reta tangente é horizontal ou vertical. Desenhe α corretamente, indicando no desenho o sentido ou orientação do movimento (quando $V \neq 0$). *Verifique sua resposta.*
(a) $x(t) = 2\cosh(t), y(t) = 3\ \text{senh}(t)(t \in \mathbb{R})$.
(b) $x(t) = t + 1, y(t) = t^2 + t(t \in \mathbb{R})$.
(c) $x(t) = t^3, y(t) = t^2(t \in \mathbb{R})$.
(d) $x(t) = t^3 - 4t, y(t) = t^2 - 4, t \in (-\infty, 0]$.
(e) $x(t) = 3\cos^3(t)/2, y(t) = -3\ \text{sen}^3(t), \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$.

(13) Considere a curva C_1 dada por $t \mapsto \alpha(t) = \Big(\cos(2t)(1 + \cos(2t)), \text{sen}(2t)(1 + \cos(2t))\Big)$, $t \in [0, \pi]$. Encontre um ponto da curva C_1 no semi-plano superior $y > 0$, cujo vetor velocidade $V(t) = \alpha'(t)$ é *horizontal*, i.e a ordenada do vetor velocidade $V(t)$ é nula (ou ainda $V \cdot (0, 1) = 0$; o *ponto* denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$).Resposta: $\alpha(\pi/6) = (3/4, 3\sqrt{3}/4)$

(14) Calcule o comprimento l do cardióide dado em coordenadas polares por $r = 1 + \cos\theta$ (com $\theta \in [0, 2\pi]$). Resposta: $l = 8$.

(15) Considere a curva parametrizada α dada por $x(t) = 3\cos t, y(t) = 3\,\text{sen}\, t, z(t) = t^2, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ Calcule o comprimento l da curva parametrizada α. Resposta: $l = \dfrac{1}{4}\left[2\sqrt{13} + 9\ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{13}}{3}\right)\right]$.

(16) Determine uma superfície S que contenha o traço ou imagem de cada curva parametrizada α abaixo.
(a) $x(t) = 3\cos t, y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t, z(t) = t^2$.
(b) $t \mapsto (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t \cos t)$. Veja Figuras 1 e 2.

Figura 1

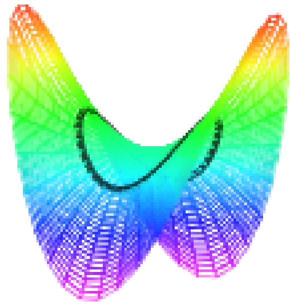

Figura 2

Decida se a curva acima é *plana* ou não, i.e se seu traço está contido num plano de $\mathbb{R}^3$ ou não.
(c) $\alpha(t) = (\cos t \cosh t, \mathrm{sen}\, t \cosh t, t)$. Neste exemplo desenhe a superfície obtida e desenhe o traço da projeção ortogonal de α no plano horizontal xy. *Sugestão*: Busque uma superfície de revolução obtida girando-se uma curva contida no semi-plano yz $(y > 0)$ em torno do eixo z.
(d) $\alpha(t) = (\cos t \cos(4t), \cos t\ \mathrm{sen}(4t), \mathrm{sen}\, t)$. *Sugestão*: Busque uma superfície clássica.

(17) Seja C_1 o semi-círculo $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ parametrizado de maneira simples com a projeção x da curva crescendo de -1 até 1. Considere o campo $F(x, y) = \left(x^2y^2, -y^2\right)$.
(a) Deduza que F não é conservativo.
(b) Deduza que C_1 pode ser naturalmente parametrizada como gráfico da forma $x \mapsto (x, f(x)), x \in [-1, 1]$, explicitando $f(x)$.

(18) Considere a curva C_3 dada pelo *arco orientado* da parábola $x = (y - 1)^2 + 1$, saindo do ponto $(1, 1)$ e chegando ao ponto $(2, 0)$.

Calcule a integral de linha $I = \int_{C_3} (y-1)d\ell$.

Sugestão: Use $\int u\sqrt{u^2+1}\,du = \frac{(u^2+1)^{3/2}}{3} + C$. Resposta: $\frac{1}{12} - \frac{5\sqrt{5}}{12}$.

(19) Seja C_1 o arco da parábola $(x, x^2), 0 \leqslant x \leqslant 1$. Seja C_2 o segmento de reta orientado saindo do ponto inicial $(1,1)$ e chegando ao ponto final $(0,3)$. Seja C_3 o segmento de reta orientado ligando o ponto inicial $(0,3)$ ao ponto final $(0,0)$.

Considere C a justaposição das curvas C_1, C_2 e C_3 (esboce um desenho auxiliar).

(a) Calcule

$$I := \int_C x^3\,dl$$

(b) Seja $a > 0$. Seja $C_a = \{(u,v)\mathbb{R}^2;\ u = ax, v = ay,\ (x,y) \in C\}$. Sem fazer cálculo explícito, determine compr(C_a) em termo do comprimento de C. Também expresse

$$I_a = \int_{C_a} u^3\,dl$$

em termo de I, sem precisar calcular I. Generalize isto para integrais do mesmo tipo mais gerais.

(*Trabalho*)

(20) Seja C_1 o semi-círculo $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ parametrizado de maneira simples com a projeção x da curva crescendo de -1 até 1. Considere o campo $F(x,y) = \left(x^2y^2, -y^2\right)$.

Calcule o trabalho W_1 realizado pelo campo F ao longo de C_1.

Resposta: $W_1 = 4/15$.

Em seguida calcule o trabalho W_2 do mesmo campo F ao longo do semi-círculo orientado de maneira que a projeção x da curva decresça de 1 até -1.

Finalmente, considere C_2 o segmento de reta orientado de $(1,0)$ à $(3,1)$. Seja C a justaposição das curvas parametrizadas C_1 (parametrização inicial) e C_2. Calcule o trabalho W de F ao longo de C. Resposta: $W = 4/15 + 59/15$.

(21) Considere a curva C_3 dada pelo *arco orientado* da parábola $x = (y-1)^2 + 1$, saindo do ponto $(1,1)$ e chegando ao ponto $(2,0)$. Calcule o *trabalho* realizado pelo campo $G(x,y) = (x-(y-1)^2, 2)$, ao longo de C_3. *Sugestão*: Use uma parametrização, $t \mapsto (x(t), y(t))$, com $y = t$. Resposta:-1.

(22) Considere o campo F em $\mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (8 + y^2 - 3x^2, e^y + 2xy + ye^{-2y})$.

Determine se $F(x,y)$ é conservativo ou não.

Encontre *todas* as funções potenciais associadas à F (caso existam); *verificando por um cálculo direto a sua resposta.* Resposta: $f(x,y) = 8x + xy^2 - x^3 + e^y - \dfrac{ye^{-2y}}{2} - \dfrac{e^{-2y}}{4} + C, C \in \mathbb{R}$.

Calcule o trabalho W realizado pelo campo F ao longo da curva $t \mapsto \Big(2\cos^7(t/2),\, 3\overset{4}{\operatorname{sen}}(t/2)\Big)$, quando t varia de $t = 0$ à $t = 2\pi$. Generalize isto para *curvas simples fechadas quaisquer.* Resposta: O trabalho pedido está dado por $W = f(-2,0) - f(2,0) = -16$.

(23) Seja $F(x,y,z) = (0,0,8)$, um campo constante vertical. Considere a hélice dada por $t \mapsto (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, bt)$, onde b é uma constante a determinar. Suponha que F move uma partícula de $(2,0,0)$ até o ponto $(2,0,70)$, ao longo da hélice dando 5 voltas em torno do eixo vertical z, realizando um trabalho W. Determine b, e calcule W, justificando sua dedução com todos os detalhes.

(*Integrais de linha no espaço e trabalho*).

(24) Seja $F(x,y,z) = (xy, z-x, 2yz)$. Seja C uma curva parametrizada, onde C está formado pela justaposição de três segmentos de retas orientados; sendo o primeiro saindo da origem até ao ponto $P := (1,0,0)$, o segundo ligando o ponto P ao ponto $Q := (1,2,0)$ e o terceiro ligando o ponto Q ao ponto $R = (1,2,-2)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x,y,z)$ ao longo de C. trabalho. Resposta: 6.

(25) Seja $F(x,y,z)$ um campo diferenciável e seja $C : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ uma curva parametrizada. Escreva a integral de linha $\displaystyle\int_C F(x,y,z) \cdot T d\ell$, na forma de uma integral de uma variável real t, onde:

C está dada como a interseção das superfícies $z = 4x^2 + 2y^2$ e $z = 12 + x^2 - y^2$, de forma que sua projeção ortogonal está orientada no sentido anti-horário, T é o vetor unitário tangente. Esboce um desenho esquemático de C, respondendo se C é uma curva plana ou não, justificando a sua afirmação. Idem para C obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e do cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

(*Teorema de Green*).

(26) Deduza que a integral

$$\int_C x(x^2 + y^2)dx + (2x + x^2y + y^3)dy :=$$

$$\int_a^b \Big(x(x^2 + y^2)dx/dt + (2x + x^2y + y^3)dy/dt \Big) dt$$

onde $C : t \mapsto (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ é uma curva plana simples fechada, é proporcional à area da região delimitada por esta curva. Interprete tal integral como trabalho. Encontre outros exemplos semelhantes de campos veoriais F realizando um trabalho ao longo de curvas fechadas com a mesma propriedade.

(27) Seja C_1 uma curva parametrizada fechada simples, que é fronteira de um domínio R_1 do plano $\mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $t \in [0, 1]$, $\alpha(0) = \alpha(1)$.
  (a) Considere o campo $F(x, y) = (-2y + e^x \cos x, 2x + \ln(1 + y^2))$. Escreva o trabalho $W_{C_1}(F)$ realizado pelo campo F ao longo de C_1 na forma de uma integral definida de uma função real de *uma variável real* t. Sendo o integrando dependente de f, f', g, g'.
  (b) Em seguida, usando obrigatoriamente o teorema de Green, calcule o trabalho de F ao longo da elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$, negativamente orientada (orientação horária).Resposta: Resposta: -24π.
  (c) Agora suponha que a área da região R_1 do enunciado seja igual a A_1 e que o centróide de R_1 seja igual a (x_0, y_0, z_0). Seja $\lambda > 0$, e considere $C_\lambda = \{(u, v); u = \lambda x, v = \lambda y, (x, y) \in C_1\}$. Considere o campo $G(u, v) = (-v^2/2, 0)$. Calcule o trabalho $W = W_{C_\lambda}(G)$ realizado pelo campo G ao longo de C_λ em termo de λ, A e de y_0. *Sugestão*: Use o teorema de Green. Resposta: $W = \lambda^3 A_1 y_0$.