# MAT1153 / 2008.1 — LISTA DE EXERCÍCIOS : PARAMETRIZAÇÕ ES DE SUPERFÍCIES, INTEGRAL DE SUPERFÍCIES, FLUXOS, TEOREMA DE GAUSS E DE STOKES

(1) Fazer exercícios 1), 2), 3), 4) da seção 9.1.2 pgs 207, 208 e exercícios 1), 2), 6), 7), 9) seção 9.2.5 pgs 213, 214 do livro texto.

(2) Fazer exercícios 3), 4) da seção 10.2.4 pgs 224, 225 e exercícios 1), 2), 3), 4), 8) da seção 10.3.4 pgs 228, 229 do livro texto.

(3) Fazer exercícios 1), 2) da seção 11.2.2 pg 254 e 1)(a), 2), 3), 4), 5), 6) da seção 11.4.5 pgs 257, 258, 259 do livro texto.

(4) Fazer exercícios 1), 2), 4) da seção 11.5.3 pgs 263, 264 , 1), 2) da seção 11.6.4 pg 266 e 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7) 8), 9) da seção 11.7 pgs 266, 267, 268 do livro texto.

(5) Fazer exercícios 1), 2), 3), 4) da seção 10.4.4 pgs 235, 236 do livro texto.

(6) Fazer exercícios 1), 2), 3), 5) da seção 10.5.3 pgs 241, 242 e exercs 1), 2), 3), 4) da seção 10.6.3 pgs 245, 246 e exercícios 1), 2), 3), 5), 6), 8), 9), 10), 11), 12) da seção 10.7, pgs 247, 248, 249 do livro texto.

(*Parametrização de superfícies*).

(7) Considere as superfícies parametrizadas abaixo ($a \geqslant b \geqslant c > 0$).
- (a) (*elipsóide*) $x = a \operatorname{sen} u \cos v, y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z = c \cos u$
- (b) (*Hiperbolóide de duas folhas*) $x = a \operatorname{senh} u \cos v, y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, z = c \cosh u$
- (c) (*Cone*) $x = a \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v, y = b \operatorname{senh} u \cosh v, z = c \operatorname{senh} u$
- (d) (*Parabolóide elíptico*) $x = au \cos v, y = bu \operatorname{sen} v, z = u^2$
- (e) (*Parabolóide hiperbólico*) $x = au \cosh v, y = bu \operatorname{senh} v, z = u^2$
- (f) (*Helicóide*)

$x = av\cos u, y = av \operatorname{sen} u, z = bu$

(i) Exceto para o helicóide encontre as equações cartesianas das superfícies na forma $F(x, y, z) = 0$, fazendo um desenho qualitativo e geométrico de seus traços (gráficos).

(ii) Identifique as curvas coordenadas $u$ =cst e $v$ =cst dentre as curvas clássicas.

(iii) Determine valores, caso seja possível, $a, b, c$ para que a superfície seja de revolução, identificando o seu eixo.

(iv) Calcule o normal $N = N(u, v)$ e o elemento de área $dA := \|X_u \times X_v\| dudv$. Caso a superfície seja de revolução determine se o normal $N$ está apontando para a região de $\mathbb{R}^3$ que contém o eixo (ou não). No caso do elipsóise determine se o normal $N$ está apontando para dentro ou para fora.

(v) Troque $v$ por $\operatorname{senh} v$ na parametrização acima do helicóide explicando se obtemos uma nova superfície ou não. Em seguida, quando $a = b$, calcule $X_u \cdot X_u, X_v \cdot X_v, X_v \cdot X_v$, onde $\cdot$ é o produto escalar de $\mathbb{R}^3$.

(vi) Considere $Y : (u, v) \mapsto (-a\cosh v \operatorname{sen} u, -a+a\cosh v\cos u, av)$. Identifique esta superfície com uma translação de uma superfície de revolução, fazendo um desenho. Em seguida, calcule $Y_u \cdot Y_u, Y_v \cdot Y_v, Y_v \cdot Y_v$, comparando com o cálculo acima.

(g) Seja $x = u\cos v, y = u^2/2, z = u \operatorname{sen} v, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$. Deduza que a superfície é de revolução fazendo um desenho apurado desta.

(h) Seja $C$ um círculo de raio $R$ com centro $O$ que está a uma distância $a > 0$ de uma eixo $L$. Gire o círculo em torno de $L$, obtendo um *toro de revolução* $\mathbb{T}^2$. Exiba uma parametrização deste toro.

(*Integral de superfícies*).

(8) Calcule a área do toro de revolução $\mathbb{T}^2$, definido no item anterior, e o volume do sólido por este englobado.

(9) Considere novamente a superfície parametrizada $S$ dada por $x = u\cos v, y = u^2/2, z = u \operatorname{sen} v, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$. Calcule a área $A$ de $S$, o centróide $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de $S$, e o momento de inércia relativo ao eixo $z$ definido por $I_z := \int_S (x^2 + y^2) dA$.

Resposta: $A = (2\sqrt{2}-1)/3, \overline{x} = 0, \overline{y} = (5+3\sqrt{2})/35, A\overline{z} = \Big(3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\Big)/4$.

(10) Considere as superfícies $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leqslant 1,\ z = xy\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 1/2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1,\ z = xy\}$.

(a) Seja $g(x,y,z) = e^{xyz} + \cos z$. Seja

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} g(x,y,z)\, dA$$

Coloque $I_1$ na forma de uma <u>integral iterada</u>, usando coordenadas usuais retangulares $x, y$. Determine rigorosamente o domínio de integração e explicite o integrando em função das variáveis $x, y$.

(b) Seja $g(x,y,z) = e^{xyz} + \cos z$. Seja

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} g(x,y,z)\, dA$$

Coloque $I_2$ na forma de uma <u>integral dupla</u>, usando coordenadas polares $r, \theta$. Determine o domínio de integração em termos de $r, \theta$ e explicite o integrando em função das variáveis $r, \theta$.

(c) <u>Calcule</u> a área de $S_1$. Resposta: $\dfrac{2\pi}{3}\left[2^{3/2}-1\right]$.

(*Fluxo através de superfícies*)

(11) Seja o campo radial $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcule, usando a definição, o fluxo $\Phi_S$ de $F$ através da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \leqslant 1\}$, orientada pelo vetor unitário $N$ de modo que no ponto $(0,0,-2)$, $N$ é igual a $(0,0,-1)$ (Note que $N$ não é constante em $S$ !!). Você pode usar o fato que a área de $S$ é igual a $12\pi$. Resposta: $\Phi_S = 24\pi$.

(12) Seja $F(x,y,z) = \lambda(0,0,1)$ o campo constante vertical. Seja $S$ a semi-esfera de raio $a$ contida no semi-plano superior $z \geqslant 0$. Seja $N$ o campo normal unitário a $S$ apontando para o exterior da esfera. Calcule o fluxo de $F$ através $S$. Mostre que o fluxo de $F$ é o mesmo calculado através de uma certa região plana, facilmente calculável. Resposta: Fluxo $= \lambda\pi a^2$.

(*Teorema de Gauss*).

(13) Considere o campo $F(x,y,z) = (x\frac{2z\sqrt{3-z}}{7-z} + e^{yz}, e^{xz}, e^{xy})$. Considere $S_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 4,\ z=3\}$, orientado pelo normal $N_1 = (0,0,1)$. Seja $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 6,\ z=1\}$, orientada pelo normal $N_2 = (0,0,-1)$. E seja $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 7-x^2-y^2,\ 1 \leqslant z \leqslant 3\}$, orientada pelo normal unitário $N_3$ cuja terceira componente é positiva.

Considere a superfície fechada $S := S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientada pelo normal $N$ que é igual a $N_1$ ao longo de $S_1$, igual a $N_2$ ao longo de $S_2$, igual a $N_3$ ao longo de $S_3$.

Usando o teorema de Gauss calcule o fluxo de $F$ através de $S$.

Resposta: $\frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$.

(14) Considere o campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e a região do espaço $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \leqslant 1\}$. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \leqslant 1\}$, orientada pelo vetor unitário $N$ de modo que no ponto $(0,0,-2), N$ é igual a $(0,0,-1)$ (Note que $N$ não é constante em $S$ !!).

(a) Calcule o fluxo de $F$ através do disco $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leqslant 3, z=1\}$, orientado pelo campo normal $(0,0,1)$. Resposta: $\Phi_D = 3\pi$.

(b) Calcule o fluxo de $F$ através do cone $\mathcal{C}$ dado por $z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \leqslant 3$.

(c) Calcule novamente o fluxo $\Phi_S$ de $F$ através da superfície $S$, usando obrigatoriamente o teorema da divergência, *aplicando-o a certa superfície fechada que é união de $S$ com outra*, dada abaixo:

(i) $S \cup D$, onde $D$ é o disco $D$ acima.

(ii) $S \cup \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é o cone $\mathcal{C}$ acima.

(iii) Compare os dois métodos tirando uma conclusão.

Resposta: $\iiint_U \mathrm{div} F dV = 27\pi$.

(15) Considere um plano $\pi$ dado por $ax+by+cz = d\ (a,b,c \neq 0)$ e um campo vetorial *constante* $F(x,y,z) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_3 \neq 0$ Seja $C$ uma curva simples fechada contida em $\pi$ que é a fronteira (bordo) de uma região plana $R$ contida em $\pi$ com área igual a $A$. Seja $S$ uma superfície contida num dos semi-espaço delimitado por $\pi$ com bordo $C$ de maneira que $S \cup R$ é a fronteira de uma região $U$ de $\mathbb{R}^3$. *Calcule o fluxo de $F$ através $S$*, considerando separadamente os casos em que a superfície está contida no

semi-espaço para o qual $F$ aponta, ou está contida no semi-espaço complementar ao semi-espaço para o qual $F$ aponta, ou $F$ está no plano $ax + by + cz = 0$.

(a) Especialize o exercício anterior quando $C$ é um quadrado com lados de comprimento $l$.
(b) Especialize o exercício anterior quando $C$ é uma elipse com eixos de comprimento $m$ e $n$.
(c) Especialize o exercício anterior quando $S$ é um cubo com arestas de comprimento $l$ com uma das faces apoiada no plano $\pi$ sendo removida de $S$; além disso, assuma que uma das arestas tem vetor diretor $(-b, a, 0)$. *Faça independentemente* um cálculo direto do fluxo de $F$ através de $S$ calculando os fluxos de $F$ através de *todas* as faces do cubo.
(d) Discuta a generalização do exercício quando $F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y)$, onde $f, g, h$ são funções reais.

(16) Seja $S$ a superfície definida por
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant 1/2,\ z = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}\}$. Assuma que $S$ está orientada pelo normal *unitário* $N$ determinado de maneira que $N$ aponta para cima, i.e $N \cdot (0, 0, 1) > 0$

Considere o campo $F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$.

Nesta questão, sugere-se que você esboce um desenho auxiliar
.

(a) Sejam $b, c$ números reais positivos. Seja $D = D(b, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leqslant b^2,\ z = c\}$, o disco de raio $r = b$ no plano $z = c$ centrado no eixo $z$, com normal *unitário* apontando $N_D$ para cima, i.e $N_D \cdot (0, 0, 1) > 0$. Determine uma <u>parametrização</u> de $D(b, c)$, explicitando o domínio. Em seguida, <u>calcule</u> o fluxo $\Phi_D$ de $F$ através de $D(b, c)$, em termos de $b$ e de $c$. Resposta: $\pi b^4/4 + cb^2\pi$.
(b) *Sem fazer cálculos,* <u>estabeleça uma fórmula</u>, fazendo uso do teorema de Gauss ou da divergência, para calcular o fluxo $\Phi_S$ de $F$ através de $S$. <u>Explique</u> corretamente as quantidades e orientações das superfícies envolvidas na fórmula, fazendo inclusive um desenho esquemático.
*Sugestão*: Note que $S$ é parte da superfície de revolução em torno do eixo $z$ gerada por $z = 1 - y^{1/2}$, $0 < y \leqslant 1$.
(c) (*leia bem o enunciado*) Considere o sólido $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)^{1/2} \leqslant (1 - z)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1/2\}$. Levando em conta que o volume de $U$ é igual a $\frac{\pi}{5}(1 - 1/2^5)$, usando o teorema de Gauss, <u>calcule</u> o fluxo $\Phi_S$ de $F$ através de $S$.

Resposta: $\Phi_S = \dfrac{3\pi}{5}(1 - 1/2^5) - \dfrac{\pi}{32} - \dfrac{\pi}{1024} + \dfrac{\pi}{4}$.

*Sugestão*: Use os itens $(a)$ e $(b)$.

(d) Para $c \in (0,1)$, considere $S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant c,$ $z = 1 - (x^2+y^2)^{1/4}\}$. Assuma que $S_c$ está orientada pelo normal *unitário* $N$ determinado de maneira que $N$ aponta para cima. Calcule o fluxo $\Phi_{S_c}$ de $F$ através de $S_c$. Em seguida, calcule $\lim\limits_{c\to 1} \Phi_{S_c}$, tirando algum significado geométrico disto. Resposta:$\Phi_{S_c} = \dfrac{3\pi}{5}(1-(1-c)^5) - \pi c(1-c)^4 - \dfrac{\pi}{4}(1-c)^8 + \dfrac{\pi}{4}$.

(17) Seja $S$ uma superfície fechada delimitando uma região $U$ do espaço com volume $V$. Encontre um campo vetorial $F = (P, Q, R)$ de maneira que o fluxo de $F$ através $S$ é exatamente o volume de $U$.

(*Teorema de Stokes*).

(18) Calcule a *circulação* do campo vetorial $f(x,y,z) = (3z, 5x, -2y)$ ao longo da curva $C$ obtida interceptando o cilindro vertical $x^2 + y^2 = 1$ pelo plano $z - y - 3 = 0$, sendo $C$ orientada positivamente quando vista de cima. Resposta: $2\pi$.

Generalize este exemplo em seguida a sua solução, obtendo outros campos e outros planos satisfazendo $\text{rot}F \cdot N =$cst, onde $N$ é um normal unitário ao plano (o cilindro está fixado).

(19) Seja $S$ o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Seja $F(x,y,z) = (e^{4x^2+y^2}, 3\ln(1+x^2+y^2+z^2), x^{999}yz)$. Seja $N$ normal unitário a $S$. Calcule $\displaystyle\iint_S (\text{rot}F) \cdot N dA$. Resposta: 0.

(*Miscelânea)*

(20) Considere o campo vetorial $F(x,y,y) = (0,0,4-z)$ e seja a superfície $S = \{(x,y,z), z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, com vetor unitário $N$ apontando para cima.

(a) Exiba uma parametrização da superfície $S$, explicitando o seu domínio. Calcule o vetor normal unitário $N$.

(b) Calcule o fluxo de $F$ através de $S$–*sem usar o teorema de Gauss*. Resposta: $8\pi$.

(c) Agora considere o disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$, com vetor unitário $N_D$ apontando para cima. Calcule o fluxo de $F$ através de $D$. Resposta. $16\pi$.

(21) Considere a mesma superfície $S$ e o mesmo campo $F$ dados na questão anterior.
(a) Use *obrigatoriamente* o teorema de Gauss para calcular o fluxo de $F$ através de $S$. Resposta: $8\pi$.
(b) Exiba uma superfície $\widehat{S}$ que seja uma porção de um plano $\pi$ de modo que o fluxo de $F$ através de $\widehat{S}$ seja zero.

Considere o campo $G(x, y) = (-y, x)$. Seja $R$ uma região do plano delimitada por uma curva $C$ positivamente orientada. Seja $T$ o vetor velocidade unitário.
(a) Usando o teorema de Green deduza que a circulação(trabalho) é dada por $\displaystyle\int_C G \cdot T dl = b \cdot \text{área}(R)$, determinando $b$. Resposta: $b = 2$.
(b) Considere $C$ a justaposição do ciclóide $t \mapsto (2\pi - t + \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$ com o intervalo $\{0 \leqslant x \leqslant 2\pi, y = 0\}$. Usando o resultado do item anterior, calcule a área $A$ da região delimitada por $C$. Resposta: $A = 3\pi$.

(22) Considere o campo $F(x, y, z) = (0, \frac{x}{2}, 2z)$.
Considere $S = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(a) Calcule o rotacional de $F(x, y, z)$, denotado por $\nabla \times F$. Determine uma parametrização de $S$, explicitando o domínio da parametrização e determinando o normal *unitário* $\widetilde{N}$. OBS: ***O normal ao longo da superfície não é um campo constante !!***
(b) Seja $N$ o normal unitário ao longo de $S$ de maneira que no ponto $(0, 0, 0)$, $N = (0, 0, -1)$. Calcule a integral $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot N\, dA$ (fluxo do rotacional)–*sem usar o teorema de Stokes e sem usar o teorema de Gauss.* Resposta: $-\pi/2$.

(23) Considere a mesma superfície $S$, mesmo normal unitário $N$ e o mesmo campo $F$ dados na questão anterior.
(a) Calcule a integral $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot N\, dA$–*usando obrigatoriamente o teorema de Stokes.*

(b) Calcule a integral $\iint\limits_S \nabla \times F \cdot N \, dA$–*usando obrigatoriamente o teorema de Gauss.*