Exercícios resolvidos P3

Questão 1

Calcule a área da superfície obtida pela revolução da curva

$$\alpha(t) = (R\cos t, 0, R\sin t + a), \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < R < a,$$

em torno do eixo x. Esta superfície é chamada de Toro.

Resposta: Uma parametrização para esta superfície é dada por (Faça um desenho!)

$$\mathbf{r}(t,\theta) = (R\cos t, (R\sin t+a)\sin\theta, (R\sin t+a)\cos\theta), \quad (t,\theta) \in [0,2\pi)\times[0,2\pi).$$

Vimos em sala que a área de uma superfície parametrizada é dada por

$$A = \iint_S 1\, dS = \iint_{[0,2\pi)\times[0,2\pi)} |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta| dA.$$

Fazendo o cálculo do produto vetorial, obtemos

$$|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta| = (-R\cos t(R\sin t + a), -R\sin t(R\sin t + a)\sin\theta, R\sin t(R\sin t + a)\cos\theta).$$

Logo,

$$|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta| = R\sqrt{(R\sin t + a)^2} = R(R\sin t + a).$$

Veja que, não colocamos o módulo na expressão acima pois $0 < R < a$ implica que $R\sin t + a > 0$ para todo t.

Finalmente,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sin t + aR\, dt d\theta \\ &= 2\pi[-R^2\cos t + aR\theta]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi\,(2aR\pi) = 4aR\pi^2. \end{aligned}$$

Nota: Esta superfície pode ser pensada como o produto cartesiano de dois círculos, um de raio a e outro de raio R. Assim, poderíamos pensar que, da mesma forma que calculamos a área da superfície de um cilíndro, a área é o produto dos perímetros, ou seja, $(2\pi a)(2\pi R) = 4aR\pi^2$.

Questão 2

Mostre que a equação $x+\sin(y+z)=0$ define implicitamente y como função de x e z ($y=\varphi(x,z)$) numa vizinhança de $(0,0,0)$. Calcule $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)$. Em seguida, explicite a função φ e calcule novamente $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)$.

Resposta: Defina a função $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ por

$$F(x,y,z)=x+\sin(y+z).$$

Observe que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\cos(y+z),$$

logo $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)=\cos(0+0)=1\neq 0$. Assim, como F é uma função C^∞, em particular C^1, e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)\neq 0$ temos que existe uma vizinhança $V\subset\mathbb{R}^2$ do ponto $(0,0)$ e uma função C^∞ $\varphi:V\to\mathbb{R}$ tal que

$$F(x,\varphi(x,z),z)=F(0,0,0)=0.$$

Em outras palavras, a equação

$$x+\sin(y+z)=0$$

define, localmente, y como função de x e z. O teorema ainda diz que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,z)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x,z),z)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x,z),z)}=-\frac{1}{\cos(\varphi(x,z)+z)}.$$

Tomando, mais uma vez a derivada parcial com respeito a x :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,z)=\frac{1}{(\cos(\varphi(x,z)+x)^2)}(-\sin(\varphi(x,z)+x))(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,z)+1).$$

Aplicando no ponto $(0,0)$, obtemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)=\frac{1}{\cos(0)}(-\sin(0))(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)+1)=0.$$

Para a segunda parte do exercício, escrevendo $\sin(y+z)=-x$, vemos que próximo ao ponto $(0,0,0)$, podemos escrever $y+z=\arcsin(-x)$. Logo

$$\varphi(x,z)=y=-z+\arcsin(-x).$$

Com isso podemos calcular as derivadas parciais diretamente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e assim,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,z) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

O que implica que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) = 0$.

Questão 3

Seja S a superfície cilíndrica com tampa mostrada na figura 1. S é a união das superfícies S_1 e S_2, sendo que S_1 é o conjunto dos pontos (x,y,z) que satisfaz $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq 1$, e S_2 é o conjunto dos pontos (x,y,z) que satisfaz $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, $z \geq 1$. Seja $F(x,y,z) = (zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2)$. Suponha que S está orientada com vetores normais apontando fora. Calcule

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S}$$

usando o teo. de Stokes de duas formas: calculando a integral de linha sobre a fronteira diretamente e escolhendo uma superfície adequada.

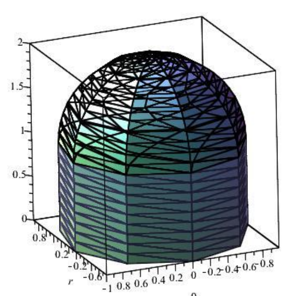

Figura 1:

Resposta: Em primeiro lugar, observe que o campo em questão é C^∞, em particular C^1, e a superfície S é suave (regular) por partes. Sendo assim, podemos aplicar o teo. de Stokes.

A fronteira de S é a curva C dada pelo conjunto dos pontos $(x, y, 0)$ que satisfazem $x^2 + y^2 = 1$. A orientação da superfície S induz a orientação anti-horária na curva C e assim,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

é uma parametrização de C. Pelo teo. de Stokes,

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S} &= \int_C F \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O teo. de Stokes também pode ser usado para argumentar que a integral do rotacional não depende da superfície escolhida, contanto que o bordo permaneça o mesmo e a orientação do bordo concorde com a orientação da nova superfície. Assim, observe que o disco unitário

$$D = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

também possui como bordo a curva C e a parametrização do disco $r : D \to \mathbb{R}^3$

$$r(x, y) = (x, y, 0)$$

tem como vetor normal $r_x \times r_y = (0, 0, 1)$ que concorda com a orientação de C. Logo, pelo teo. de Stokes

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \nabla \times F \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} F(x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 0 \, dA = 0.
\end{aligned}$$

Questão 4

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$$

sendo que S é a superfície dada por $S = \{(x, y, z)|x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$, orientada com vetores normais apontando para fora, e $F(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2))$. Efetue os cálculos diretamente e depois use o teo. da divergência.

Resposta: Primeiro, vamos calcular a integral de superfície diretamente. Seja $r : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização do cilindro dada por

$$r(t, z) = (\cos t, \sin t, z).$$

Sendo assim,

$$r_t \times r_z = (\cos t, \sin t, 0).$$

A integral de superfície é

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(r(t, z)) \cdot (r_t \times r_z)\, dzdt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1, 1, z) \cdot (\cos t, \sin t, 0)\, dzdt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos t + \sin t\, dzdt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, usando o teorema da divergência. Seja

$$E = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

e ∂E a fronteira da região E orientada com vetores normais apontando para fora. Observe que $\partial E = S \cup T_1 \cup T_0$, sendo que $T_1 = \{(x, y, 1)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ é a tampa de cima do cilindro e $T_0 = \{(x, y, 0)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ é a tampa de baixo do cilindro. Assim, como E é do tipo I, II e III, simultaneamente, e F é de classe C^1, temos que, pelo teorema da divergência,

$$\iiint_E \nabla \cdot F\, dV = \iint_{\partial E} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_S F \cdot d\mathbf{S} + \iint_{T_1} F \cdot d\mathbf{S} + \iint_{T_2} F \cdot d\mathbf{S}. \quad (1)$$

Do lado esquerdo, temos que

$$\begin{aligned}
\iiint_E \nabla \cdot F \, dV &= \iiint_E x^2 + y^2 \, dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 R^3 \, dR d\theta dz \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Agora o lado direito. O vetor normal a T_0 é $n_0 = (0, 0, -1)$, logo

$$\begin{aligned}
\iint_{T_0} F \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{T_0} z(x^2 + y^2) \, dS \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $z = 0$ em T_0. Já o vetor normal a T_1 é $n_1 = (0, 0, 1)$, logo, usando a parametrização $r(x, y) = (x, y, 1)$,

$$\begin{aligned}
\iint_{T_0} F \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} F(x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 + y^2 \, dA \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, pela equação (1), temos que

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = 0.$$