# Exercícios resolvidos

Mudança de variáveis

## Questão 1

Considere a região $R$, limitada pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 4$, pelas retas $y = x$, $y = 4x$ e tal que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Determine uma transformação $T$ e uma região $S$ de forma que

$$T(S) = R,$$

sendo $S$ um retângulo no plano $uv$ com lados paralelos aos eixos.

**Resposta:**

Observe que os pontos $(x, y) \in R$ satisfazem $x > 0$ e $y > 0$. Assim, podemos escrever $R$ da seguinte forma

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Isto sugere a seguinte mudança de variáveis

$$xy = u \text{ e } \frac{y}{x} = v.$$

Ou seja, $T(u, v) = (\frac{u}{\sqrt{uv}}, \sqrt{uv})$ (Confira!).

A região $S$ é obtida diretamente das equações

$$1 \leq xy \leq 4 \Rightarrow 1 \leq u \leq 4$$

e

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 4 \Rightarrow 1 \leq v \leq 4.$$

(Faça o desenho de $R$ e de $S$!).

Abaixo, faremos o caminho mais longo, porém mais geométrico, para descobrir a região $S$.

Podemos usar a transformação inversa $T^{-1}(x, y) = (xy, \frac{y}{x}) = (u, v)$ para descobrir a imagem dos bordos de $R$. A imagem da hipérbole $xy = 1$, ou $y = \frac{1}{x}$, é

$$T^{-1}(x, y) = T^{-1}(x, \frac{1}{x}) = (1, \frac{1}{x^2}).$$

Como só temos variação em $v = \frac{1}{x^2}$ temos que a imagem é a interseção de $u = 1$ com o primeiro quadrante. A imagem da reta $y = x$ é

$$T^{-1}(x,y) = T^{-1}(x,x) = (x^2, 1).$$

Agora, só temos variação em $u = x^2$, logo a imagem é a interseção da reta $v = 1$ com o primeiro quadrante. Procedendo desta forma com as outras curvas, analisando os pontos de interseção e a imagem de um ponto interior (Faça as contas!!!), concluímos que

$$S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 4,\ 1 \leq v \leq 4\}.$$

# Questão 2

Calcule a integral

$$\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\, dA,$$

sendo que $R$ é o retângulo delimitado por $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ e $x + y = 3$.

**Resposta:**

Primeiro, observe que podemos escrever o integrando como

$$f(x,y) = (x+y)e^{(x+y)(x-y)}.$$

Isto sugere a mudança de variáveis $T(u,v) = (x,y)$ sendo que

$$u = x + y \text{ e } v = x - y.$$

Após resolver estas equações para $x$ e $y$, obtemos

$$x = \frac{u+v}{2} \text{ e } y = \frac{u-v}{2}.$$

Para utilizar o teorema da mudança de variáveis, é preciso encontrar a região $\bar{R}$ tal que $T(\bar{R}) = R$ de forma biunívoca. Analisando a interseção das retas, temos que o retângulo $R$ possui os vértices nos pontos $(0,0)$, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $(1,-1)$ e $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Para fazer uma análise detalhada de quem é a imagem $\bar{R}$,

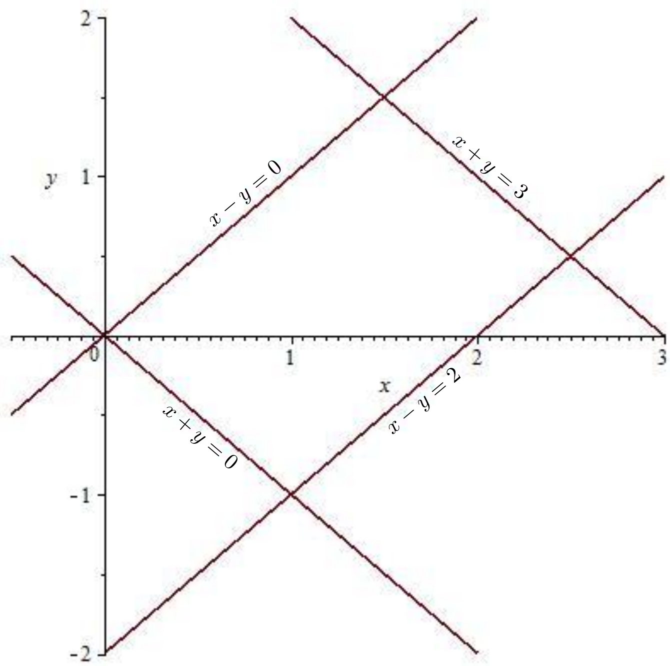


Figura 1: Região $R$

vamos estudar quais são as imagens das arestas pela transformação $T^{-1}$. A reigão $R$ está descrita na Figura 1.

Seja o primeiro segmento dado por $y - x = 0$ com $x \in [0, \frac{3}{2}]$. Logo

$$T^{-1}(x, y) = T^{-1}(x, x) = (x + x, x - x) = (2x, 0).$$

Sendo assim, a imagem deste segmento é $(u, 0) = (2x, 0)$, ou seja, são os pontos da forma $(u, 0)$, $u \in [0, 3]$.

Seja o segundo segmento dado por $x + y = 3$ com $x \in [3/2, 5/2]$. Logo

$$T^{-1}(x, y) = T^{-1}(x, 3 - x) = (3, 2x - 3).$$

A imagem deste segmento são os pontos da forma $(3, v)$, $v \in [0, 2]$.

Seja o terceiro segmento dado por $x - y = 2$ com $x \in [1, \frac{5}{2}]$. Logo

$$T^{-1}(x, y) = T^{-1}(x, x - 2) = (2x - 2, 2).$$

Portanto, a imagem deste segmento são os pontos da forma $(u, 2)$, $u \in [0, 3]$.

Por último, seja o quarto segmento dado por $x + y = 0$ com $x \in [0, 1]$. Temos que

$$T^{-1}(x, y) = T^{-1}(x, -x) = (0, 2x).$$

Assim, a imagem são os pontos da forma $(0, v)$, $v \in [0, 2]$.

Após testar a imagem por $T^{-1}$ de um ponto contido no quadrado, concluímos que a região $\bar{R}$ é dada por

$$\bar{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 2, 0 \leq u \leq 3\}.$$

Vale notar que poderíamos ter encontrado a região de modo muito mais fácil, bastando observar a restrição de $R$, $0 \leq x - y \leq 2$, pela mudança de variáveis é equivalente à $0 \leq v \leq 2$. O mesmo se dá com $v$.

Quanto ao determinante do Jacobiano de $T$,

$$\begin{aligned} \det DT(u, v) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos usar o teo. de mudança de variáveis para obter

$$\begin{aligned} \iint_{R=T(\bar{R})} (x + y)e^{(x+y)(x-y)}\, dA &= \iint_{\bar{R}} u\, e^{uv} \,|\det DT(u, v)| dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{u\, e^{uv}}{2}\, dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 [e^{uv}]_0^2\, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 e^{2u} - 1\, du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{2u}}{2} - u \right]_0^2 = \frac{e^4}{4} - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

# Questão 3

Use a transformação $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = w^2$ para encontrar o volume da região limitada pela superfície

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$$

e os planos coordenados.

**Resposta:** A região em questão é dada por

$$R : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

O volume pedido é obtido pela integral tripla

$$Vol(R) = \iiint_R 1\, dV.$$

Sendo a tranformação $T(u, v, w) = (u^2, v^2, w^2)$, sua inversa é

$$T^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}).$$

Usaremos a inversa para descobrir a região $S$ tal que $T(S) = R$, ou

$$S = T^{-1}(R).$$

A região $R$ possui como bordo as superfícies

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1\};\\
R_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\};\\
R_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{z} \leq 1\};\\
R_4 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Seja $S_1 = T^{-1}(R_1)$. Observe que um ponto $(u, v, w) \in S_2$ satisfaz

$$u + v + w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1,$$

sendo que $x$, $y$, e $z$ são não-negativos. Logo $S_1$ é a região do plano $u+v+w = 1$ tal que $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $w \geq 0$. Defina $S_2 = T^{-1}(R_2)$. Da mesma forma, um ponto $(u, v, w) \in S_2$ satisfaz $u = 0$ e

$$v + w = \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1.$$

Ou seja, $S_2$ é o triangulo no plano $u = 0$ delimitado pelas retas $v = 0$, $w = 0$ e $v + w = 1$. Proceda da mesma forma para obter as regiões $S_3$ e $S_4$. Observando a imagem de um ponto interior de $R$ concluímos que

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u + v + w \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0\}.$$

A Jacobiana da transformação $T$ é

$$DT(u,v,w) = \begin{bmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{bmatrix}.$$

E assim, $\det DT(u,v,w) = 8uvw > 0$, exceto no bordo de $S$. Pelo teorema de mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\iiint_R 1\, dV &= \iiint_S 8uvw\, dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-v} \int_0^{1-v-w} 8uvw\, dudvdw \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-w} 8(1-v-w)vw\, dvdw \\
&= 8\int_0^1 (1-w)w - \frac{w(1-w)^3}{3} - \frac{w^2(1-w)^2}{2}\, dw \\
&= \ldots
\end{aligned}$$