Exercícios resolvidos P2

Questão 1

Defina as funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*, respectivamente, por

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ e } \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}. \tag{1}$$

1. Verifique que estas funções satisfazem a seguinte relação

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

2. Use o item anterior para obter uma parametrização para a curva

$$\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 2,\ x > 0\}.$$

   Exiba uma parametrização do tipo $x = f(y)$ para esta mesma curva.

3. Considere a mudança de variáveis $T(x, y) = (u, v)$ sendo que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Mostre que essa mudança de variáveis leva a curva α no gráfico da função $f(u) = \frac{1}{u}$, $u > 0$.

Resposta:

Os dois primeiros itens são apenas contas diretas. Observe, apenas, que no item 2, a curva pode ser obtida como gráfico de uma função de uma variável. Mas cuidado, o *gráfico da curva* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é um outro conjunto, ele é dado por

$$\Gamma(c) := \{(t, c(t)) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Você é capaz de ver que, no caso do item 2, as duas curvas possuem gráficos bem diferentes... Tente fazer um esboço.

Quanto ao item 3, temos que as novas variáveis são dadas por

$$(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y).$$

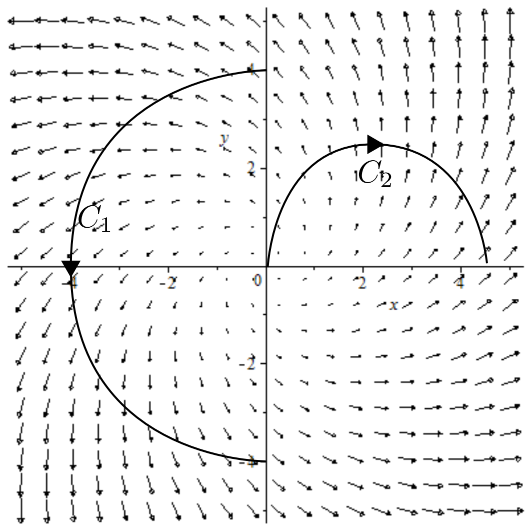

Figura 1: Questão 2

Observe que elas satisfazem

$$\begin{aligned} uv &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right). \end{aligned}$$

Se o ponto (x, y) estiver contido em α então $uv = 1$. Como $x = \sqrt{1+y^2}$, temos que

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1+y^2}-y) > 0.$$

Logo, a curva α é levada no gráfico da função $v = f(u) = \frac{1}{u}$, $u > 0$.

Questão 2

A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas C_1 e C_2. As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.

Resposta: Relembre que a integral de linha de $\mathbf{F}$ com respeito a curva $C = C(t)$ é dada por

$$\int_C \mathbf{F} dr = \int_a^b \mathbf{F}(C(t)) \cdot C'(t) dt.$$

Por outro lado, sabemos da álgebra linear que

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta,$$

sendo que θ é o ângulo entre u e v. Sendo assim, observando a forma como C_1 está orientada, temos que em cada ponto de C_2 o campo $\mathbf{F}$ faz um ângulo menor que $\frac{\pi}{2}$ com o vetor velocidade C_2'. Logo,

$$\mathbf{F}(C_1(t)) \cdot C_1'(t) > 0$$

e assim a integral de linha é positiva.

Faça o mesmo para C_2.

Questão 3

Determine se $\mathbf{F}$ é, ou não conservativo. Se for, determine f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Neste caso, a função f é chamada de *potencial escalar*.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$;
2. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3}), \quad y < 0$;
3. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3, 3x^2y^2 + \frac{x}{y}), \quad y > 0$.

Resposta: Façamos o item 2. Os outros itens ficam como exercício.

Primeiro, vamos testar se $\mathbf{F}$ é conservativo ou não. Se $P = 2xy + y^{-2}$ e $Q = x^2 - 2xy^{-3}$ então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y^{-3}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y^{-3},$$

logo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Antes de afirmar que $\mathbf{F}$ é conservativo é preciso ter o cuidado de verificar que é C^1 e o domínio é simplesmente conexo. Neste caso, isso é satisfeito pois quando $y < 0$, $\mathbf{F}$ possui derivadas parciais de todas as ordens, e o semiplano $\{(x, y)|y < 0\}$ é claramente simplesmente conexo (Faça um desenho e se convença disso). Agora sim, podemos afirmar que $\mathbf{F}$ é conservativa.

Sendo assim, vamos buscar um potencial escalar f. Como f precisa satisfazer $\mathbf{F} = \nabla f$, temos que

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

As igualdades acima nos sugerem tomar as respectivas antiderivadas para recuperar f :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int P\, dx \\ &= \int 2xy + y^{-2}\, dx \\ &= x^2 y + xy^{-2} + h(y). \end{aligned}$$

Observe que apareceu uma função h que depende apenas de y. Isto ocorre pois tomamos a antiderivada da função P com respeito a x, isto nos fornece uma *família* de funções cujas derivadas parciais com respeito a x são iguais a P. Sempre que derivamos com respeito a x, todos os fatores que dependem apenas de y são cancelados, logo, a nossa família de funções está indexada por uma função de y. Eis o porque da função h.

Agora, para obter h, derive $f(x, y) = x^2 y + xy^{-2} + h(y)$ com respeito a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy^{-3} + h'(y).$$

Como vimos, para que $\mathbf{F} = \nabla f$, é preciso que $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Logo

$$x^2 - 2xy^{-3} = Q = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy^{-3} + h'(y)$$

$\Rightarrow h'(y) = 0$. Ou seja $h(y) = \textit{constante}$. Assim, obtemos não uma, mas uma família de funções f dadas por

$$f_{cte}(x, y) = x^2 y + xy^{-2} + cte.$$

Para obter uma função f específica, basta escolher uma constante, digamos $cte = 0$. Logo $f = f_0 = x^2 y + xy^{-2}$.

Questão 4

Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(a) Mostre que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

(b) Considere o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ e as curvas $C_1(t) = -\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t \in [0, \pi]$ e $C_2(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, $t \in [0, \pi]$. Mostre que

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\, dr \neq \int_{C_2} \mathbf{F}\, dr.$$

Aparentemente, o resultado acima contradiz o item anterior. Diga em que consiste essa contradição e por que ela não acontece.

(c) Seja $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$. Mostre que $\mathbf{F} = \nabla f$. Ou seja, f é um potencial escalar para $\mathbf{F}$. Por quê isso não contradiz os itens anteriores?

(d) Seja C uma curva simples, fechada, lisa por partes (regular por partes) e orientada positivamente que delimita uma região no plano que contém a origem. Mostre que

$$\int_C \mathbf{F}\, dr = 2\pi.$$

Resposta: Os três primeiros itens decorrem de um cálculo direto e de uma análise teórica.

Quanto ao item (d), considere C uma curva simples, fechada, lisa por partes e orientada positivamente que delimita uma região que contém a origem. Agora, considere C_r, um círculo de raio $r > 0$ orientado positivamente. Escolha $r > 0$ de modo que o círculo C_r esteja contido na região delimitada por C.

Seja D a região entre a curva C e o círculo C_r. Pelo teorema de Green generalizado, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F} dr &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ \int_C \mathbf{F}\, dr + \int_{C_r} \mathbf{F}\, dr &= \int_D 0\, dA \\ \int_C \mathbf{F}\, dr &= -\int_{-C_r} \mathbf{F} dr = \int_{C_r} \mathbf{F} dr,\end{aligned}$$

sendo que na segunda linha usamos o item (a). A conta acima nos diz que a integral de linha sobre C é igual a integral de linha sobre o círculo de raio r, C_r. Seja $C_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{C_r} \mathbf{F}\, dr &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(C_r(t)) \cdot C_r'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r\sin t\mathbf{i} + r\cos t\mathbf{j}}{r^2}\right) \cdot (-r\sin t\mathbf{i} + r\cos t\mathbf{j})\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Isso conclui o exercício.

Questão 5

Determine se o conjunto dado é ou não: aberto, conexo por caminhos e simplesmente conexo.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < 3\}$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < |x| < 2\}$;

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (2, 3)\}$.

Resposta: Façamos as letras (a) e (b), as outras serão deixadas como exercício.

Letra (a): Geometricamente, o conjunto em questão é uma faixa horizontal infinita entre as retas $y = 0$ e $y = 3$. Primeiro vamos mostrar que este conjunto é aberto. Tome um ponto qualquer (a, b) deste conjunto. Sabemos que $0 < b < 3$. Seja $R = \min\{b, 3 - b\}$. A bola aberta

$$B_R(a, b) = \{(x, y) | \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < R\}$$

está contida no conjunto pois a coordenada y sempre satisfaz

$$0 < b - R < y < b + R < 3,$$

pela escolha de R. O conjunto é conexo por caminhos: dados dois pontos, o segmento de reta que os liga está sempre contido no conjunto. O conjunto é simplesmente conexo, já que não possui buracos. (Esboce o conjunto para se convencer!)

Letra (b): Geometricamente, o conjunto é o semi-anel delimitado pelos círculos de raio 1 e 2 centrados na origem. O conjunto não é aberto: o ponto $(2, 0)$ pertence ao conjunto e qualquer bola aberta centrada neste ponto irá conter pontos cuja coordenada y é negativa (FAÇA UM DESENHO). Novamente, este conjunto não possui buracos ou, toda curva simples, fechada e regular por partes contida neste conjunto não delimita uma região que contém pontos fora do conjunto. Este conjunto é conexo por caminhos: dados dois pontos quaisquer, podemos liga-los compondo dois caminhos, um semi-círculo e um segmento radial. (Faça este caminho!)