Cálculo a várias variáveis II
MAT 1163

Exercícios - Teorema da função implícita

Exercício 1:

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2y^2 + e^x + z$. Mostre que a equação $f(x,y,z) = 0$, define implicitamente x como função $(x = \varphi(y,z))$ de y e z numa vizinhança de $(0,1,-1)$. Calcule $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y,z)$ numa vizinhança do ponto $(1,-1)$.

Exercício 2:

a) Mostre que a equação $x + \operatorname{sen}(y+z) = 0$ define implicitamente y como função $(y = \varphi(x,z))$ de x e z numa vizinhança de $(0,0,0)$. Calcule $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)$.

b) Explicite a função φ e calcule novamente $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)$.

Exercício 3:

Seja $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ e $z_0 \neq 0$ e seja (x_0,y_0,z_0) um ponto que satisfaz a equação

$$\frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right) \tag{1}$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Indique que condições deve satisfazer a função φ de forma a que a equação (1) defina implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de (x_0,y_0,z_0).

b) Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

onde $z = \varphi(x,y)$, na vizinhança de (x_0,y_0).

Exercício 4:

Mostre que a equação $e^z\operatorname{sen}(xyz) + 2z + 2xy = \pi$ define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de $(1,\pi/2,0)$.

Exercício 5:

Assuma que a pressão (P), o volume (V) e a temperatura (T) de um sistema físico satisfazem a equação $F(P,V,T) = 0$. Supondo que esta equação permite definir implicitamente qualquer uma das três variáveis em função das restantes, deduza as igualdades seguintes:

$$a) \quad \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial V}$$

$$b) \quad \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial P} = -1.$$

Exercício 6:

Um gás diz-se Van der Walls se a sua pressão molar, volume e temperatura (p,V,T) verificarem a equação

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \tag{2}$$

onde R é a constante de Avogrado e a e b são duas constantes positivas que se determinam experimentalmente.

O caso $a = b = 0$ corresponde a um gás perfeito. Os termos corretivos $\frac{a}{V^2}$ e $-b$, permitem obter um modelo melhor no caso de gases muito densos, compensando as forças exercidas pelas moléculas entre si, consideradas como pequenos dipolos.

a) Mostre que na vizinhança de qualquer ponto (p_0, V_0, T_0) que verifique a equação (2) e que satisfaça

$$p_0 V_0^3 - aV_0 + 2ab \neq 0,$$

V é função de p e T.

b) Calcule

$$\frac{\partial V}{\partial T} \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial p}.$$

c) Mostre que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}(p,T) = \frac{2aR^2(3b/V - 1)}{V^3(p - a/V^2 + 2ab/V^3)^3}.$$