

PUC-RIO – CB-CTC

P2 DE ELETROMAGNETISMO – 06.05.14 – terça-feira

Nome : _____

Assinatura: _____

Matrícula: _____ Turma: _____

**NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS
E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.**

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	Valor	Grau	Revisão
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,5		
3ª Questão	3,0		
Total	10,0		

**A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta
e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.**

Formulário:

Volumes: $\frac{4}{3} \pi R^3$ (Esfera de raio R)
 $\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

Superfícies: $4 \pi R^2$ (Esfera de raio R)
 $2 \pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \ln \left[x + (x^2 + a^2)^{1/2} \right]$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{|a|} \arctan \left(\frac{x}{|a|} \right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x}$$

$$\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

1ª Questão (3,5)

Duas placas paralelas condutoras de área **A**, separadas de uma distância **d** pelo meio dielétrico de permissividade elétrica **ε**, constituem um capacitor cuja capacitância aproximada é dada por:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Baseado nisso, considere a configuração da Figura 1, constituída de uma bateria e três placas paralelas condutoras de determinada espessura não desprezível e equivalente a uma combinação de dois capacitores. As placas estão inicialmente descarregadas, têm áreas iguais a **100 cm²** cada uma e estão separadas de **1 mm** por meios dielétricos iguais, de constante dielétrica **k = 8**. (Nos cálculos, utilize: $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ F/m)

Considere as seguintes fases **sucessivas**:

Fase 1:

As placas D e E são conectadas a uma bateria de fem igual a **10 V**, conforme a Figura 1. Nesta situação, determine:

- a) (0,5) As cargas elétricas, com sinais, das placas D, I e E;
- b) (0,5) A energia total armazenada nas regiões entre as placas.

Fase 2:

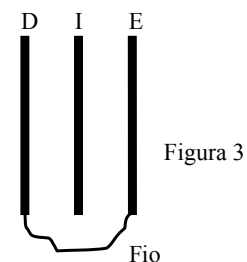
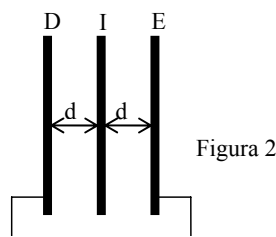
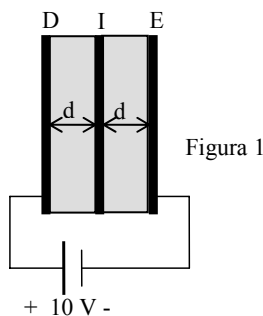
A bateria é removida e, a seguir, os meios dielétricos entre as placas são substituídos pelo vácuo, conforme mostra a Figura 2. Nesta situação determine:

- c) (0,5) As d.d.p. entre as placas: $V_D - V_E$, $V_D - V_I$ e $V_I - V_E$;
- d) (0,5) O trabalho externo **W** necessário para remover os dielétricos.

Fase 3:

As placas D e E são conectadas entre si durante longo tempo por um fio com resistência de **1,0 MΩ**, conforme mostra a Figura 3. Nesta fase, determine:

- e) (0,5) A intensidade e o sentido da corrente elétrica no fio em função do tempo;
- f) (0,5) A energia dissipada no fio;
- g) (0,5) A carga elétrica das placas ao final desta fase.



SOLUÇÃO

- a) As três placas constituem dois capacitores em série C_1 e C_2 :

$$C_1 = C_2 = C = 8 \times 9 \times 10^{-12} \times 100 \times \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 7,2 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 \Rightarrow C_{eq} = 3,6 \times 10^{-10} \text{ F} \quad e \quad Q_1 = Q_2 = Q_{eq} = C_{eq} \mathcal{E} = 3,6 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q_D = 3,6 \times 10^{-9} \text{ C} \quad e \quad Q_E = -3,6 \times 10^{-9} \text{ C} \quad e \quad Q_I \text{ total} = 0 \text{ (permanece sem carga)}$$

$$b) U_E = \frac{1}{2} \frac{Q_{eq}^2}{C_{eq}} = 1,8 \times 10^{-8} \text{ J}$$

$$c) \text{conservação da carga} \Rightarrow Q'_{eq} = Q_{eq} = 3,6 \times 10^{-11} \text{ C}$$

$$\text{dielétrico removido} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \Rightarrow C'_1 = C'_2 = C' = C/8 \Rightarrow C'_{eq} = 4,5 \times 10^{-11} \text{ F} \quad V_D - V_E = Q'_{eq} / C'_{eq} = 80 \text{ V} \quad e$$

$$V_D - V_I = V_I - V_E = Q'_{eq} / C' = 40 \text{ V}$$

$$d) U'_E = \frac{1}{2} \frac{Q'^2_{eq}}{C'_{eq}} = 8 \times U_E \Rightarrow W_{\text{externo}} = U'_E - U_E = 1,26 \times 10^{-7} \text{ J}$$

e) A conexão das placas pelo fio resistivo equivale a um circuito RC com processo de descarregamento do capacitor constituído das placas D e E.

$$i(t) = i(0) e^{-t/\tau} ; i(0) = (V_D - V_E) / R_{\text{fio}} = 80 / R_{\text{fio}} = 8 \times 10^{-5} \text{ A}$$

$$\tau = R_{\text{fio}} C'_{eq} = 45 \times 10^{-6} \text{ s}$$

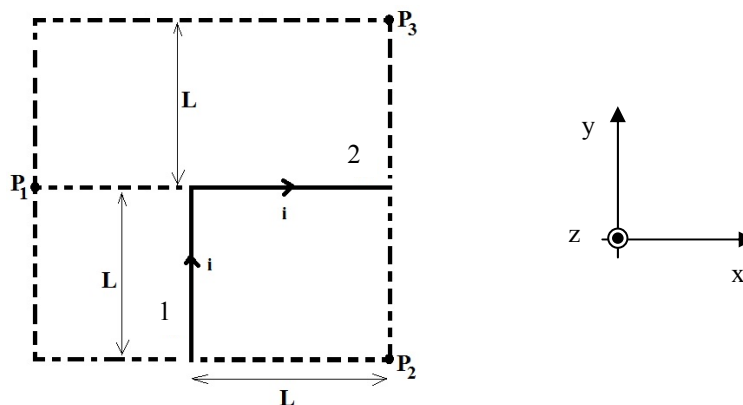
$$i(t) = 8 \times 10^{-5} \exp(-t/\tau) \quad \text{com sentido D para E}$$

f) A energia dissipada é igual a armazenada em C_{eq} ao final da fase 2 igual $U_E = 1,44 \times 10^{-7} \text{ J}$.

g) As placas D e E perdem toda carga $\Rightarrow Q_D = Q_E = 0$
A placa I permanece com carga total nula

2ª Questão: (3,5)

A figura mostra dois fios condutores de corrente. A corrente no fio 1 tem o sentido positivo do eixo y (+j) e a corrente no fio 2 tem o sentido positivo do eixo x (+i). Com esta escolha de sistema de coordenadas, o sentido positivo do eixo z é para fora do papel. As correntes nos fios 1 e 2 são iguais a i.



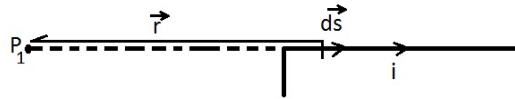
Utilizando explicitamente a lei de Biot-Savart:

- (0,5) Calcule o campo magnético B_{II} (P_1) gerado no ponto P_1 pela corrente no fio 2;
- (1,5) Calcule o campo magnético B_I (P_2) gerado no ponto P_2 pela corrente no fio 1;

- c) (1,5) Calcule o campo magnético total \mathbf{B} (P_3) gerado no ponto P_3 pelas correntes dos fios 1 e 2.

SOLUÇÃO

a)



Na figura podemos observar que os vetores $d\mathbf{s}$ e \mathbf{r} são antiparalelos, pelo qual $d\mathbf{s} \times \mathbf{r} = 0$. Assim, $\mathbf{B}_{II}(P_1) = 0$

b)

Observando a figura vemos que $d\mathbf{s} = dy \mathbf{j}$ de onde teremos que $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ é um vetor na direção $-\mathbf{k}$. Assim, da lei de Biot-Savart

$$d\mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi) dy \cdot \sin\theta / r^2$$

Novamente, observando a figura teremos $r^2 = L^2 + y^2$ e $\sin\theta = L/(L^2+y^2)^{1/2}$.

Assim:

$$d\mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi) dy \cdot L / (L^2+y^2)^{3/2} \rightarrow \mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi) L \cdot \int dy / (L^2+y^2)^{3/2} \text{ nos limites entre } 0 \text{ e } L.$$

Usando a integral na capa da prova, vemos que

$$\int dy / (L^2+y^2)^{3/2} = (1/L^2)(y / (L^2+y^2)^{1/2}) \Big|_0^L = (1/L^2)(1/(2)^{1/2})$$

$$\text{Então: } \mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi) L \cdot 1 / (L^2(2)^{1/2}) = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L) \cdot 1 / (2)^{1/2}$$

c)

Usando o princípio de superposição, podemos escrever que $\mathbf{B}(P_3) = \mathbf{B}_I(P_3) + \mathbf{B}_{II}(P_3)$

O campo $\mathbf{B}_{II}(P_3)$ é calculado de forma semelhante ao item b) com a diferença que $d\mathbf{s}_{II} \times \mathbf{r}$ esta na direção $+\mathbf{k}$. Assim:

$$\mathbf{B}_{II}(P_3) = (\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L) \cdot 1 / (2)^{1/2}$$

No caso do campo $\mathbf{B}_I(P_3)$ vemos que ele continua na direção $-\mathbf{k}$. Observando a figura vemos que

$$\mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi) L \cdot \int dy / (L^2 + [L+y]^2)^{3/2} \text{ nos limites entre } 0 \text{ e } L.$$

$$\int dy / (L^2 + [L+y]^2)^{3/2} = (1/L^2)([L+y] / (L^2 + [L+y]^2)^{1/2}) \Big|_0^L = (1/L^2)(2/(5)^{1/2} - 1/(2)^{1/2})$$

$$\text{Assim: } \mathbf{B}_I = (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L)(2/(5)^{1/2} - 1/(2)^{1/2})$$

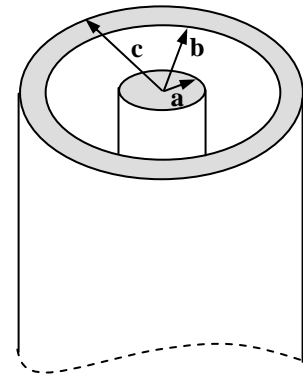
Somando ambos resultados teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P_3) &= \mathbf{B}_I(P_3) + \mathbf{B}_{II}(P_3) = (\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L) \cdot 1 / (2)^{1/2} + (-\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L)(2/(5)^{1/2} - 1/(2)^{1/2}) = \\ &= (\mathbf{k})(\mu_0/4\pi L)(2/(2)^{1/2} - 2/(5)^{1/2}) = (\mathbf{k})(\mu_0/2\pi L)(1/(2)^{1/2} - 1/(5)^{1/2}) \end{aligned}$$

3ª Questão: (3,0)

Considere o cabo coaxial muito longo da figura ao lado, formado por um cilindro central de raio **a** e uma casca cilíndrica externa de raios **b** e **c** (**b < c**), concêntrica com o cilindro.

Sabendo que uma corrente **I** flui no cilindro e uma corrente **-I** flui na casca cilíndrica (em sentidos opostos):



- a) **(2,0)** calcule o campo magnético **B** (módulo, direção e sentido) em todas as regiões do espaço considerando que as correntes estão uniformemente distribuídas nas seções transversais do cilindro e da casca cilíndrica.
- b) **(1,0)** Faça um gráfico do módulo de **B** em função do raio (distância ao centro do cabo).

SOLUÇÃO

a) Usaremos a Lei de Ampere para calcular os campos em cada região desde que todos eles são circunferenciais.

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env.} \quad 2\pi\rho B = \mu_0 I_{env.}$$

1) $\rho < a$:

Cálculo de $I_{env.}$: como a distribuição é uniforme faremos uma regra de três com a área

$$I \sim \pi a^2$$

$$I_{env.} \sim \pi \rho^2 I_{env.} = I \frac{\rho^2}{a^2} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \quad [T].$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env.} \quad 2\pi\rho B = \mu_0 I_{env.}$$

2) $a < \rho < b$:

Neste caso, a corrente envolvida é **I**.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} [T]$$

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env.} \quad 2\pi\rho B = \mu_0 I_{env.}$$

3) $b < \rho < c$:

Cálculo de $I_{env.}$: como a distribuição é uniforme faremos uma regra de três com a área

$$I_{env.} = I - I'$$

$$I \text{ ----- } \pi(c^2 - b^2)$$

$$I' \text{ ----- } \pi(\rho^2 - b^2) \quad I' = \frac{(\rho^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} I_{env} = \frac{(c^2 - \rho^2)}{(c^2 - b^2)} I_{env} \quad B = \frac{\mu_0 I (c^2 - \rho^2)}{2\pi\rho(c^2 - b^2)} \quad [T]$$

$$\oint_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env} \cdot 2\pi\rho B = \mu_0 I_{env}$$

4) $\rho > c$:

Neste caso, a corrente envolvida é $I - I = 0$. $B = 0$ [T].

b)

