PUC-RIO – CB-CTC

P4 DE ELETROMAGNETISMO – 28.06.13 – sexta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	2,5		
2ª Questão	2,5		
3ª Questão	2,5		
4ª Questão	2,5		
Total	10,0		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário:

<u>Volumes</u>: $\frac{4}{3}\pi R^3$ (Esfera de raio R)

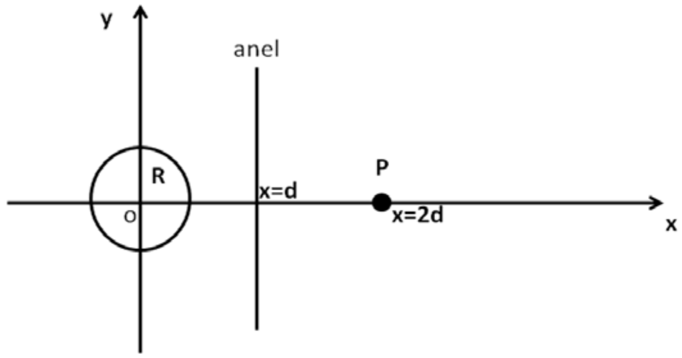
$\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

<u>Superfícies</u>: $4\pi R^2$ (Esfera de raio R)

$2\pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

1ª Questão (2,5)

O valor do módulo do campo elétrico presente na superfície de uma esfera condutora de raio R = 5 cm, mostrada na figura abaixo, é igual a 100 N/C. O campo elétrico aponta para o interior da esfera.



a) (**1,0**) Calcule a carga resultante Q na superfície da esfera (deixe o resultado em função de π e ε_0).

Considere agora que um anel isolante uniformemente carregado com carga total igual a -Q é colocado numa distância d (d > R) do centro da esfera como indicado na figura acima (o anel é visto de perfil).

b) (**1,5**) Sabendo que o raio do anel é r = $\sqrt{3}$ d, calcule o vetor campo elétrico resultante no ponto P de coordenada x = 2d (deixe o resultado em função de d).

SOLUÇÃO

a) LEI DE GAUSS $\quad -4\pi R^2 E(R) = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = -4\pi\varepsilon_0 R^2 E$

$$q = -4\pi\varepsilon_0 (5\cdot 10^{-2})^2 \cdot 100 = -\pi\varepsilon_0$$

b) CARGA TOTAL ANEL $= -q = +\pi\varepsilon_0$

$$E_{ESFERA}(2d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2d)^2} = -\frac{1}{16 d^2}$$

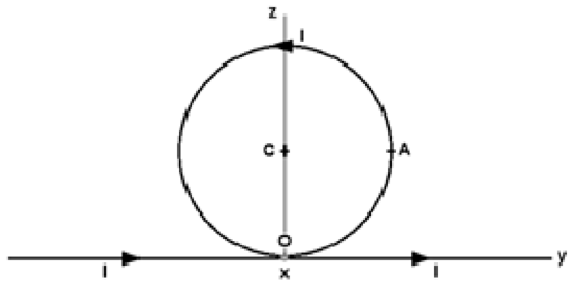
$$E_{ANEL}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)(x-d)}{[(x-d)^2+r^2]^{3/2}}$$

$$E_{ANEL}(2d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi\varepsilon_0\, d}{[d^2+3d^2]^{3/2}} = \frac{d}{4\cdot 8d^3} = \frac{1}{32 d^2}$$

$$\vec{E}_{tot}(P) = -\frac{1}{32 d^2}\,\hat{i}$$

2ª Questão: (2,5)

Um fio extremamente longo é dobrado na forma mostrada na figura, de forma a evitar o contato no ponto de cruzamento O. O raio da parte circular é R e a corrente I tem o sentido indicado



a) (**0,5**) Determine a contribuição da parte linear do fio para o vetor campo magnético no centro C e no ponto A do círculo.

b) (**1,0**) Determine a contribuição da parte circular do fio para o vetor campo magnético no centro C do círculo e o vetor campo magnético total no mesmo ponto

Em seguida, a parte circular do fio é girada de 90º, sem distorção, em torno do eixo z, tornando-se perpendicular à parte linear, de tal forma que a nova posição do ponto A tem coordenada x positiva.

c) (**0,5**) Determine uma expressão para o vetor campo magnético total no centro C do círculo

SOLUÇÃO

(a) Pela lei de Ampère:

$$2\pi R B = \mu_0 I \rightarrow \vec{B}_{Alin} = \vec{B}_{Clin} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{x}$$

(b) Pela lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_{Ccir} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\frac{\vec{ds}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\,d\theta}{R^2}\hat{x} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{x}$$

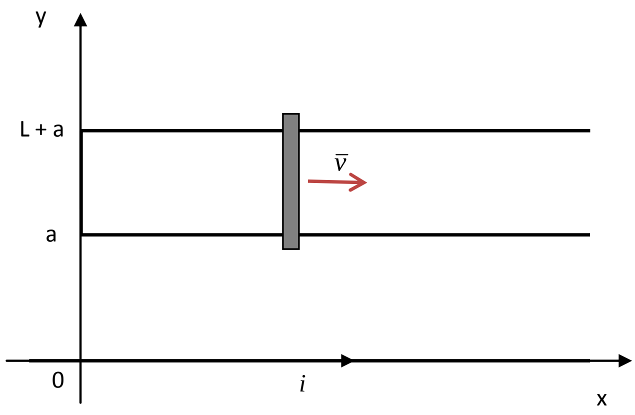
$$\vec{B}_{Ctot} = \vec{B}_{Clin} + \vec{B}_{Ccir} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\hat{x}$$

(c) Adaptando-se os resultados anteriores, tem-se

$$\vec{B}_{Ctot} = \vec{B}_{Clin} + \vec{B}_{Ccir} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi}\hat{x} - \hat{y}\right)$$

3ª Questão: (2,5)

A figura ao lado mostra uma barra de comprimento L que se move com velocidade constante $\vec{v}$ ao longo de trilhos paralelos ao eixo x, conectados por um segmento contido no eixo y. Os trilhos e o segmento são condutores, fixos e indeformáveis e o plano xy é horizontal. No eixo x existe um fio muito comprido percorrido por uma corrente ***i*** que cria um campo magnético não uniforme dado pela Lei de Ampère



a) (**1,0**) Encontre a força eletromotriz induzida na barra.

b) (**0,5**) Supondo que a resistência da barra vale R e as dos trilhos e do segmento são desprezíveis, calcule a corrente induzida e indique o seu sentido (<u>faça uma nova figura no caderno de respostas</u>).

c) (**1,0**) Calcule a força realizada por um agente externo para manter a barra se deslocando com velocidade constante. Indique o sentido da força externa.

SOLUÇÃO

a) O campo magnético na região dos trilhos vale em [T]

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\bar{z}$$ Campo saindo do plano do papel.

O fluxo criado por este campo vale em [Wb]:

$$\varphi_m = \iint \bar{B}.d\bar{S} = \int_0^x \int_a^{L+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\bar{z}.\,\mathrm{dxdy}$$

$$\varphi_m = \frac{\frac{\mu_0 i x}{2\pi}\ln(L+a)}{a}$$

A fem induzida será em [V]:

$$\epsilon = -\frac{d\varphi_m}{dt} = -\frac{\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln(L+a)}{a}\frac{dx}{dt}$$

$$\epsilon = \frac{\frac{\mu_0 i v}{2\pi}\ln(L+a)}{a}$$

b) A corrente induzida será em [A]:

$$\frac{i_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 i v}{2\pi R}\ln(L+a)}{a}$$

O sinal serve apenas para indicar o sentido da corrente. Como o fluxo está aumentando, o fluxo induzido terá sentido contrário, i.e., entrando no papel. Assim a corrente induzida circulará no sentido HORÁRIO.

c) Na barra temos uma corrente induzida circulando num campo magnético. Ela sofrerá a ação de uma força dada em [N] por:

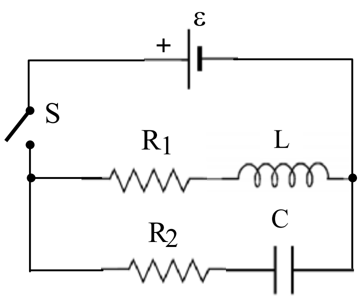
$$F_m = -F_{ext} = \int i_{ind} d\bar{l} \times B$$

$$\frac{= \int_{L+a}^{a} i_{ind}\, dy\hat{y} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat{z} = i_{ind}\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln a}{L+a}\hat{x}$$

$$\bar{F}_{ext} = \frac{\mu_0^2 i^2 v}{4\pi^2 R} \ln^2 \frac{L+a}{a}\hat{x}$$

4ª Questão: (2,5)

Considere o circuito ao lado com $\varepsilon = 50$ V, $L = 10$ H, $C = 20\ \mu$F, $R_1 = 25\ \Omega$ e $R_2 = 5000\ \Omega$. O capacitor C está inicialmente descarregado. A chave S é fechada para $t = 0$, produzindo uma corrente i_L que passa através do ramo do indutor e uma corrente i_C que passa através do ramo do capacitor.



a) (**0,5**) Calcule o valor de i_L e i_C no instante $t = 0$ s e o valor de i_L e i_C após um tempo t muito grande após o fechamento da chave S.

b) (**0,5**) Escreva (**<u>indicando os valores</u>**) o comportamento das correntes i_L e i_C em função do tempo (a partir de $t = 0$ s), levando em conta as diferentes constantes de tempo de cada ramo. Faça um gráfico destas correntes.

c) (**0,5**) Após um tempo muito longo, a chave S é aberta de novo. Desenhe o gráfico do comportamento de V_C em função do tempo a partir da abertura de S.

d) (**1,0**) Qual é o valor da energia total dissipada nos dois resistores R_1 e R_2 ?

SOLUÇÃO

a) Instante $t = 0$:

$i_L = 0$; $i_C = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{50}{5\cdot 10^3} = 0{,}01\ A$

(L como circuito aberto ; C como ~~circuito~~ curto circuito)

$\mathcal{E}_i = -L\left(\frac{di}{dt}\right) \to \mathcal{E}$

para ~~instante~~ $t \to \infty$:

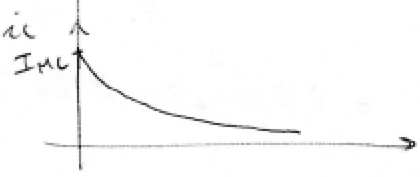
$i_L = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{50}{25} = 2\ A$; $i_C = 0$

(L como curto circuito ; C como circuito aberto)

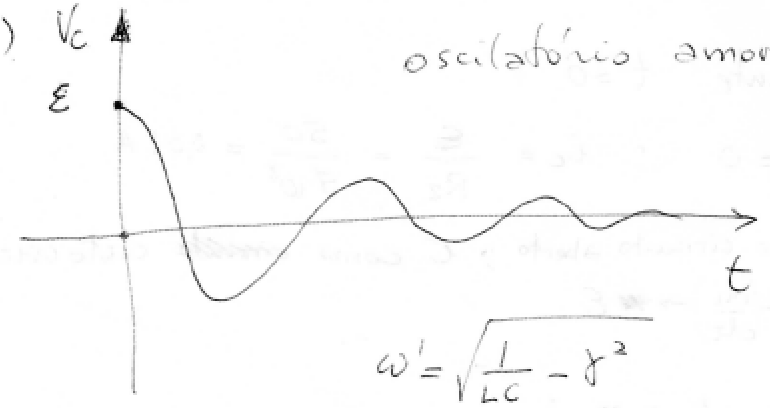
b) $i_L = I_{M_L}(1 - e^{-t/\tau_L})$ $\quad I_{M_L} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = 2A$; $\tau_L = \frac{L}{R_1} = \frac{10}{25} = 0{,}4\ s$

$i_C = I_{M_C} e^{-t/\tau_C}$; $I_{M_C} = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = 0{,}01\ A$; $\tau_C = R_2 C = 5\cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}$

$\tau_C = 0{,}1\ s$



c)



oscilatório amortecido

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \gamma^2} \qquad \gamma = \frac{R_1 + R_2}{L}$$

d) O valor da energia total dissipada em R_1 e R_2 é a energia total armazenada em L e C:

Portanto:

$$U_T = \frac{1}{2} C V_{max}^2 + \frac{1}{2} L i_{max}^2$$

$$U_T = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2} L I_{max_L}^2$$

$$U_T = \frac{1}{2}\, 20 \cdot 10^{-6} \cdot (50)^2 + \frac{1}{2}\, 10 \cdot (2)^2$$

$$U_T = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 2{,}5 \cdot 10^{-2} + 20 \cong 20\ J$$