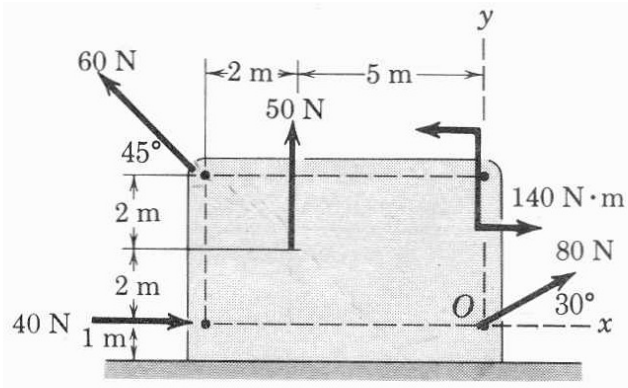
**ENG 1007 – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

Primeira prova – turma A 18/03/2014

**1ª Questão (2,5 pontos)**

a) Reduza o sistema de forças da figura a uma única força que age no ponto $O$ e a um conjugado. Indicar orientação e sentido.

b) Deslocar esta resultante paralelamente, ao longo do eixo $x$, para que ela, sozinha, seja equivalente a todas as ações representadas (dizer a que distância de O a resultante deve cortar o eixo $x$).




Resposta:

a) $R_x = 40 + 80\frac{\sqrt{3}}{2} - 60\frac{\sqrt{2}}{2} = 66,85N$ ; $R_y = 80\frac{1}{2} + 50 + 60\frac{\sqrt{2}}{2} = 132,43N$ ; $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 148,35N$

$\alpha = \arctan\left(R_y / R_x\right) = 63,21^0$ (ângulo de $R$ com o eixo $x$, no sentido anti-horário)

$M_O = -140 + 50 \times 5 - 60\frac{\sqrt{2}}{2}(4-7) = 237,28NM$ (no sentido horário)

b) Como $M_O$ está no sentido horário, a resultante $R$, para representar sozinha todas as ações, deve se deslocar para cima e passar a uma distância $d = M_O / R = 1,60m$ do ponto O, cortando o eixo $x$ a uma distância $d_x = M_O / R_y = 1,79m$ à esquerda do ponto O.

**2ª Questão (2,5 pontos)**

A Lei de Hooke, na sua forma uniaxial, estabelece uma relação linear entre a tensão aplicada e a deformação decorrente, dada por $\sigma = E\varepsilon$, onde $\sigma$ é a tensão, $E$ o módulo de elasticidade e $\varepsilon$ a deformação.

a) Estabeleça uma relação entre a Lei de Hooke em termos de tensão/deformação e a equação da mola $F = kx$, onde $F$ é a força aplicada, $k$ é a rigidez da mola e $x$ o alongamento ou encurtamento da mola em relação à sua posição neutra.

b) Qual o significado físico da rigidez da mola?

c) E do módulo de elasticidade?

**Resposta**:

$\sigma = E\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \quad \rightarrow \quad F = \underbrace{\frac{EA}{L}}_{K}\Delta L$. Portanto, $k = \frac{EA}{L}$.

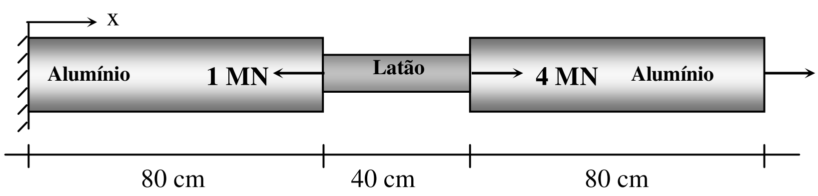
Rigidez é a força necessária para produzir um alongamento unitário. Módulo de Elasticidade é a tensão necessária para produzir uma deformação unitária.

**3ª Questão (2,5 pontos)**

Considere a barra de seção transversal circular (d = 10 cm e D = 20 cm) da figura, formada por alumínio ($E^{Al} = 70GPa$ e $\sigma_e^{Al} = 250MPa$) e latão ($E^{L} = 100GPa$ e $\sigma_e^{L} = 430MPa$). Pede-se:

a) O valor da força P para que a barra tenha uma variação do comprimento total de 4,37mm.

b) O coeficiente de segurança da barra contra escoamento para o valor de P encontrado acima.




$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

**Resposta**

Seção $S_1$ para 0 < x < 80cm

$$F_1 = (P+3)MN \qquad A_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 3{,}14\times10^{-2}m^2 \qquad E^{Al} = 70\times10^3 \frac{MN}{m^2}$$

Seção $S_2$ para 80 < x < 120cm

$$F_2 = (P+4)MN \qquad A_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 7{,}85\times10^{-3}m^2 \qquad E^{L} = 100\times10^3 \frac{MN}{m^2}$$

Seção $S_3$ para 120 < x < 200cm

$$F_3 = (P)MN \qquad A_3 = A_1 \qquad E^{Al} = 70\times10^3 \frac{MN}{m^2}$$

a) $\delta l_x = 4{,}37mm = 4{,}37\times10^{-3}m = \sum_i \frac{F_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$

$$4{,}37\times10^{-3} = \frac{(P+3)\cdot 0{,}8}{70\times10^3 \cdot 3{,}14\times10^{-2}} + \frac{(P+4)\cdot 0{,}4}{100\times10^3 \cdot 7{,}85\times10^{-3}} + \frac{(P)\cdot 0{,}8}{70\times10^3 \cdot 3{,}14\times10^{-2}}$$

$\boxed{P = 1MN}$

b) $F_1 = 4MN \qquad \sigma_x^1 = \frac{4}{3{,}14\times10^{-2}} = 127{,}4MPa \qquad coef.seg = \frac{250}{127{,}4} = 1{,}96$

$F_2 = 5MN \qquad \sigma_x^2 = \frac{5}{7{,}85\times10^{-3}} = 636{,}94MPa \qquad coef.seg = \frac{430}{636{,}94} = 0{,}68 \Leftarrow$ <u>Resposta</u>

$F_3 = 1MN \qquad \sigma_x^3 = \frac{1}{3{,}14\times10^{-2}} = 31{,}85MPa \qquad coef.seg = \frac{250}{31{,}85} = 7{,}85$

**4ª Questão (2,5 pontos)**

As propriedades mecânicas de um tipo de borracha foram obtidas experimentalmente segundo dois testes de laboratório.

- No primeiro teste, um bloco cúbico da borracha, de aresta $a$ = 10 cm, foi comprimido na direção $z$, mantendo-se as faces das direções $x$ e $y$ confinadas. Para uma força aplicada P = 10 kN, verificou-se que o bloco sofreu uma diminuição de volume de 700/3 mm$^3$.
- No segundo teste, o mesmo bloco de borracha sofreu compressão com a mesma força P, mas as faces das direções $x$ e $y$ estavam livres para se deformar. A diminuição de volume correspondente foi de 100 mm$^3$.

Determinar, com base nestas informações, quanto valem o módulo de elasticidade longitudinal $E$ e o coeficiente de Poisson ν.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha\Delta T \qquad \delta\ell_x = \int_{\ell_x} \varepsilon_x dx$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \alpha\Delta T \qquad \delta A_x = \int_{A_x} \left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) dA_x$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha\Delta T \qquad \delta V = \int_V \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) dV = \frac{1-2\nu}{E}\int_V \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) dV + \int_V 3\alpha\Delta T dV$$

- Primeiro teste: Sabe-se que $\sigma_z = \dfrac{-P}{a^2}$. Além disso, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ para as faces confinadas.

Deve-se determinar $\sigma_x = \sigma_y$ (iguais por simetria das ações nas direções $x$ e $y$). Portanto:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x - \frac{P}{a^2}\right) \;\Rightarrow\; \sigma_x = \sigma_y = \frac{-\nu}{1-\nu}\frac{P}{a^2}$$

Variação de volume: $\delta V = \displaystyle\int_V \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) dV = -\frac{1-2\nu}{E}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{P}{a^2}a^3$

Para os valores numéricos apresentados (tudo em N e m): $-\dfrac{700}{3}10^{-9} = -\dfrac{1-2\nu}{E}\dfrac{1+\nu}{1-\nu}10^4 \times 10^{-1}$ (1)

- Segundo teste: Sabe-se que $\sigma_z = \dfrac{-P}{a^2}$. Além disso, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ para as faces livres.

Variação de volume: $\delta V = \displaystyle\int_V \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) dV = -\frac{1-2\nu}{E}\frac{P}{a^2}a^3$

Para os valores numéricos apresentados (tudo em N e m): $-100 \times 10^{-9} = -\dfrac{1-2\nu}{E}10^4 \times 10^{-1}$ (2)

Resolvendo as equações **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e **Erro! Fonte de referência não encontrada.** $\boxed{\Rightarrow E = 2GPa;\quad \nu = 0{,}4}$.