PUC-RIO – CB-CTC

FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO –18.09.13 –quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:_____________________________________Turma:_______________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	Valor	Grau	Revisão
1ª Questão	3,0		
2ª Questão	3,5		
3ª Questão	3,5		
Total	10,0		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N\, m^2}{C^2}$$

Superfície esfera = $4\pi\, R^2$

Volume esfera = $\frac{4}{3}\pi\, R^3$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2+a^2)^{1/2}}$$

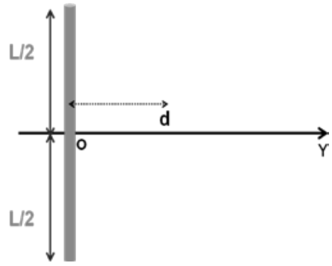
$$\int \frac{x dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x dx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

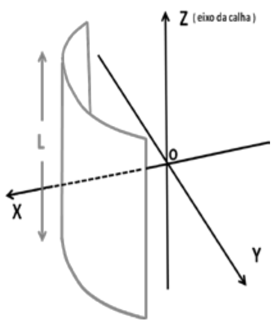
FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO – 18.09.13 –quarta-feira

1ª Questão: (3,0)

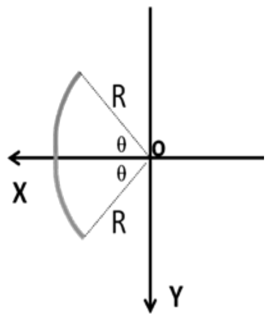
Uma linha uniforme de cargas de comprimento L e carga total q (Figura ao lado) produz um campo elétrico $\overrightarrow{E_y}$ a uma distância d da linha ao longo da sua mediatriz que é dado pela equação: $\overrightarrow{E_y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d\sqrt{d^2 + L^2/4}}\,\hat{j}$.



Considere agora um sistema constituído por uma calha cilíndrica isolante de comprimento L, raio de curvatura R, carregada uniformemente com uma carga total Q positiva. A origem dos eixos O está situada sobre o eixo da calha, a uma distância R da superfície lateral da mesma, e no plano mediano que corta a calha em duas partes idênticas de comprimento L/2. A interseção da calha com o plano XY descreve um arco de circunferência de ângulo igual a 2θ, com θ = π/4 , como representado na figura.



Vista 3D



Vista de cima

a) (**1,0**) Considere a calha como constituída por fios de carga infinitesimal dQ, largura dℓ e comprimento L. Calcule a carga infinitesimal dQ de cada fio. (A densidade superficial de carga da calha é σ = 2Q/πRL)

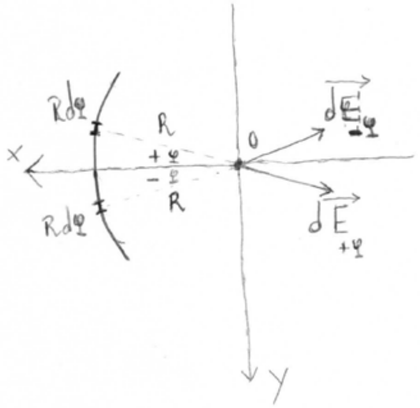
b) (**1,0**) Considerando que L >> R, obtenha o módulo, direção e sentido do campo elétrico gerado pela calha carregada na origem dos eixos O.

Um plano infinito carregado uniformemente é agora colocado paralelamente ao plano YZ cortando o eixo X na coordenada - R. Nesta condição, nota-se que o campo elétrico resultante na origem O é nulo.

c) (**1,0**) Calcule a densidade superficial de carga σ do plano infinito carregado.

SOLUÇÃO

a) SE CONSIDERA A CALHA COMO FORMADA POR FIOS CARREGADOS COM COMPRIMENTOS L E $Rd\varphi$. A CARGA DE UM FIO E' $\frac{Q}{(\pi/2)} d\varphi = \frac{2Q}{\pi} d\varphi$



POR SIMETRIA DO SISTEMA O CAMPO ELETRICO NA ORIGEM O SERA' PARALLELO AO EIXO X E SENTIDO NEGATIVO

b)

$$d\vec{E}(\varphi) = d\vec{E}_{-\varphi} + d\vec{E}_{+\varphi} = -2\cos\varphi \frac{K\, dq_{fio}}{R\sqrt{R^2 + L^2/4}} \hat{i}$$

No LIMITE QUE $L \gg R$

$$d\vec{E}(\varphi) = -\frac{2K\cos\varphi}{R\,(L/2)} dq_{fio}\, \hat{i} = -\frac{4K}{RL}\cos\varphi \left(\frac{2Q}{\pi}\right) d\varphi\, \hat{i}$$

$$= -\cos\varphi \frac{8KQ}{\pi RL} d\varphi\, \hat{i}$$

$$\vec{E}_{TOTAL}(0) = -8\cancel{KQ}\int_0^{0} \frac{\cos(\varphi)}{\pi RL} d\varphi\, \hat{i} = -\frac{8KQ}{\pi RL}\int_0^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi\, \hat{i} =$$

$$= -\frac{8KQ}{\pi RL} \operatorname{sen}\varphi \Big|_0^{\pi/4} \hat{i} = -\frac{8KQ}{\pi RL}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} = -\frac{4Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\, \pi RL}\hat{i} = -\frac{Q\sqrt{2}}{\pi^2\varepsilon_0 RL}\hat{i}$$

c)

O PLANO PRODUZ NA ORIGEM UM CAMPO ELETRICO QUE VALE $+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$. ESTE CAMPO SE ADICIONA AO CAMPO ELETRICO PRODUZIDO PELA CALHA DE MANERA QUE O CAMPO ELETRICO TOTAL NA ORIGEM SEJA ~~IGUAL~~ ~~IGUAL A~~ NULO.

$$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{Q\sqrt{2}}{\pi^2\varepsilon_0 RL} = 0 \Rightarrow \sigma = +\frac{2\sqrt{2}\,Q}{\pi^2 RL}$$

2ª Questão: (3,5)

(a) (**1,0**) Uma seção de comprimento L do cilindro infinito de raio “a” mostrado na Figura 1 tem carga total Q. Esta carga se distribui no volume definido pela seção de acordo com densidade volumétrica de carga $\rho(r) = \rho_o (r/a)^2$. A densidade não varia ao longo do eixo de cilindro, o que permite definir a densidade linear de carga $\lambda = Q/L$. Determine a relação entre λ e ρ_o, considerando os valores de Q, L e “a” conhecidos.

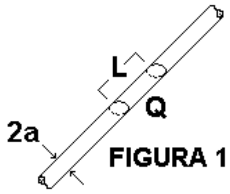


FIGURA 1

(b) (**1,0**) Determine o módulo do vetor campo elétrico em um ponto qualquer afastado da distância R (onde R > a) do eixo do cilindro infinito da Figura 1, considerando o valor de λ conhecido.

(c) (**1,5**) Três cilindros infinitos idênticos (raio “a” e densidade linear de carga λ) estão alinhados com os eixos coordenados, conforme mostra a Figura 2. Determine o vetor campo elétrico em um ponto P de coordenadas (x_o,y_o) situado no plano xy e fora dos três cilindros, desprezando as distorções devidas à junção situada em torno da origem.

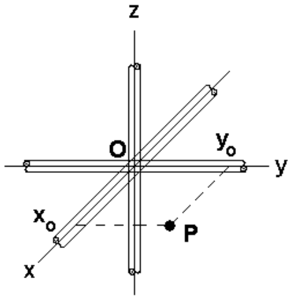


FIGURA 2

SOLUÇÃO

(a) A carga total no interior da seção de comprimento L é

$$Q = \lambda L = \int_0^L \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho_o \left(\frac{r}{a}\right)^2 r dr d\phi dz = \frac{\pi a^2}{2} \rho_o L \to \lambda = \frac{\pi a^2}{2} \rho_o$$

(b) Considerando que o campo desejado é radial e supondo uma superfície Gaussiana Σ cilíndrica de raio R, altura L e coaxial com o cilindro, tem-se

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 2\pi R L [E(R)] = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} \to \vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{R} \hat{\rho}$$

(c) Adaptando a expressão do item (c) e definindo o ângulo θ entre o eixo Ox e raio OP, tem-se

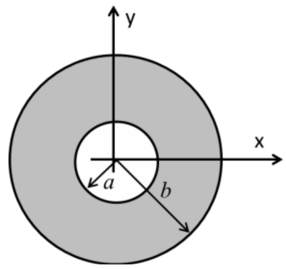
$$\vec{E}(x_o, y_o) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{y}}{y_o} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{x}}{x_o} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{cos\theta \hat{x} + sen\theta \hat{y}}{(x_o^2 + y_o^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(x_o, y_o) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \left[\frac{\hat{y}}{y_o} + \frac{\hat{x}}{x_o} + \frac{x_o \hat{x} + y_o \hat{y}}{(x_o^2 + y_o^2)}\right]$$

$$\vec{E}(x_o, y_o) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \left\{\left[\frac{1}{x_o} + \frac{x_o}{(x_o^2 + y_o^2)}\right] \hat{x} + \left[\frac{1}{y_o} + \frac{y_o}{(x_o^2 + y_o^2)}\right] \hat{y}\right\}$$

3ª Questão: (3,5)

A figura ilustra uma coroa circular disposta no plano x-y, centrada na origem, de raio interno $a = \sqrt{3}\ m$ e raio externo $b = \sqrt{8}\ m$. Sua carga está uniformemente distribuída e possui densidade $\sigma = +\ 18\ nC/m^2$.
Use $k = 9 \times 10^9\ N\ m^2/C^2$ ou $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ C^2/N\ m^2$.



(a) (**1,5**) Considerando a referência para potenciais no infinito, encontre o valor do potencial elétrico *V(z)* num ponto qualquer do eixo *z*, à distância *z* da origem.

(b) (**1,0**) Calcule o potencial no ponto *P(0; 0; 1,0 m)* e o valor do trabalho realizado pela força eletrostática no deslocamento de uma carga teste $q_0 = -\ 2\ \mu C$ desde *P* até um ponto *Q* onde o potencial vale $V_Q = 820\ V$.

(c) (**1,0**) Suponha que o potencial gerado pela coroa circular no ponto *P(0; 0; 1,0 m)* tenha valor $V_P = +\ 1000\ V$. Queremos anular o potencial em *P*, e para isso dispomos de uma carga pontual de valor $q_1 = -\ 100\ nC$. Determine todos os pontos do espaço em que podemos posicionar a carga q_1 de modo a tornar nulo o potencial total em *P*.

SOLUÇÃO

a)

$$V = \int \frac{k\,dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma 2\pi\, w\, dw}{\sqrt{w^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{w\,dw}{\sqrt{w+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{w^2+z^2}\right]_{a=\sqrt{3}}^{b=\sqrt{8}}$$

Substituindo os valores:

$$V = \frac{18\ \times 10^{-9}}{2 \times 9\ \times 10^{-12}}\left[\sqrt{\sqrt{8}^2+z^2} - \sqrt{\sqrt{3}^2+z^2}\right]$$

Finalmente:

$$\boxed{V(z) = 1000\left[\sqrt{8+z^2} - \sqrt{3+z^2}\right](Volt)}$$

b) Substituindo *z = 1,0 m* na expressão acima, encontramos $V_P = V(1{,}0) = 1000\ V$. O trabalho da força eletrostática é dado por:

$$W_{PQ} = -\Delta U_{PQ} = -q_0 \Delta V_{PQ} = -q_0(V_Q - V_P) = -(-2\ \times 10^{-6})(820 - 1000)$$
$$\rightarrow \boxed{W_{PQ} = -0{,}36\ mJ}$$

c) O que queremos é $V_P = 0$ $\Rightarrow$ $V_P^{q1} + V_P^{coroa} = V_P^{q1} + 1000 = 0$ $\Rightarrow$ $V_P^{q1} = -\ 1000\ V$. Assim:

$$\frac{kq_1}{r} = -1000 \quad \rightarrow \quad \frac{9\ \times 10^9(-100\ \times 10^{-9})}{r} = -1000 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = 0{,}9\ m}$$

Finalmente, todos os pontos do espaço em que podemos posicionar q_1 constituem a esfera de raio *0,9 m* centrada em *P*.