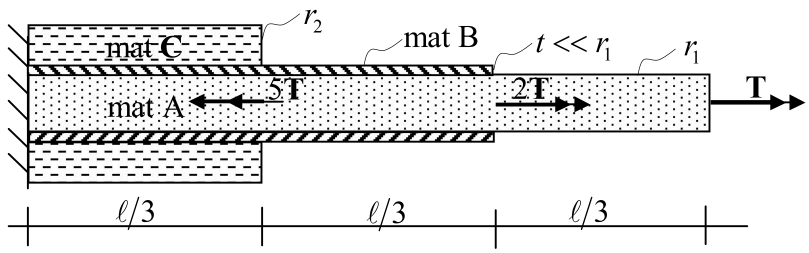
# ENG 1007 – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Segunda prova – turma A 16/10/2012

## 1ª Questão (2,5 pontos)

Um eixo está submetido a um torque que varia trecho a trecho ao longo de seu comprimento, conforme representado na figura abaixo. O eixo se compõe de três tubos concêntricos: o mais longo é feito de um material A (módulo de elasticidade $G_A$) e tem raio $r_1$; o tubo intermediário é feito de um material B (módulo de elasticidade $G_B$), tem raio $r_1$ e espessura $t << r_1$; o tubo mais curto é feito de um material C (módulo de elasticidade $G_C$) e tem raio interno $r_1$ e externo $r_2$. Calcular:

a) as tensões de cisalhamento máximas a que cada material está submetido e em que trechos atuam estas tensões;
b) a rotação sofrida pela extremidade do eixo em relação ao seu engaste, indicando também o sentido da rotação.

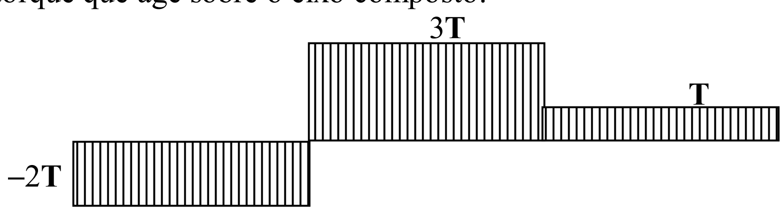



$$\tau(x,\rho) = \frac{T(x)\,G\,\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 \mathrm{d}\rho}$$

Para tubo de parede fina: $J = 2\pi r^3 t$

$$\varphi_\ell - \varphi_0 = \int_0^\ell \frac{T(x)}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 \mathrm{d}\rho}\,dx$$

**Solução**:
Diagrama de torque que age sobre o eixo composto:




Tubo A: $J_A = \pi r_1^4/2$ Tubo B: $J_B = 2\pi r_1^3 t$ Tubo C: $J_C = \pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)/2$

a) $\tau^A_{máx} = \text{máximo}\left(\dfrac{2\mathbf{T}G_A r_1}{G_A J_A + G_B J_B + G_C J_C}, \dfrac{3\mathbf{T}G_A r_1}{G_A J_A + G_B J_B}, \dfrac{\mathbf{T}r_1}{J_A}\right) = \text{máximo}\left(\dfrac{3\mathbf{T}G_A r_1}{G_A J_A + G_B J_B}, \dfrac{\mathbf{T}r_1}{J_A}\right)$ ou no segundo ou no terceiro trecho

$\tau^B_{máx} = \text{máximo}\left(\dfrac{2\mathbf{T}G_B r_1}{G_A J_A + G_B J_B + G_C J_C}, \dfrac{3\mathbf{T}G_B r_1}{G_A J_A + G_B J_B}\right) = \dfrac{3\mathbf{T}G_B r_1}{G_A J_A + G_B J_B}$ no segundo trecho

$\tau^C_{máx} = \dfrac{2\mathbf{T}G_C r_2}{G_A J_A + G_B J_B + G_C J_C}$ no primeiro trecho

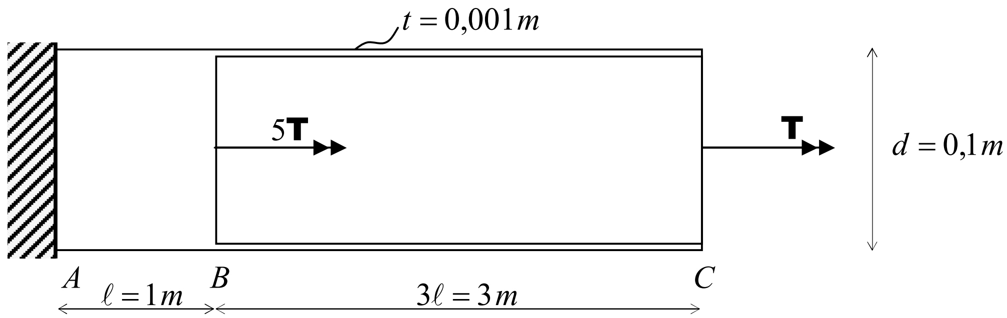
b) $\phi_\ell - \phi_0 = \dfrac{-2\mathbf{T}\,\ell/3}{G_A J_A + G_B J_B + G_C J_C} + \dfrac{3\mathbf{T}\,\ell/3}{G_A J_A + G_B J_B} + \dfrac{\mathbf{T}\,\ell/3}{G_A J_A}$ no sentido do torque aplicado na extremidade

**2ª Questão (2,5 pontos)**

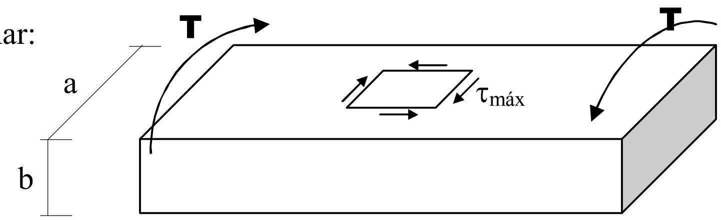
Um eixo está submetido a torção, conforme mostrado na Figura, para **T** = 10 k*Nm*. O trecho AB tem seção transversal quadrada cheia, de lado *d* = *0,1 m*. O trecho BC tem seção transversal quadrada de parede fina, de lado *d* = *0,1 m* e espessura *t* = *0,001 m*. O módulo de elasticidade transversal do material é *G* = *80GPa*. Calcular:

a) a rotação da seção C em relação à seção A;

b) a máxima tensão de cisalhamento no tubo.




Fórmulas para eixo de seção transversal retangular:




$$\tau_{máx} = \frac{\mathbf{T}}{\alpha a b^2} \qquad \Delta\phi = \frac{\mathbf{T} L}{\beta a b^3 G}$$

Tabela para obtenção dos coeficientes α e β

| a/b | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 10,0 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | 0,208 | 0,219 | 0,231 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,282 | 0,291 | 0,312 | 0,333 |
| β | 0,141 | 0,166 | 0,196 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,291 | 0,312 | 0,333 |

Fórmulas para eixo de seção transversal de parede fina: $\tau = \dfrac{\mathbf{T}}{2A_m t}$, $\quad d\phi = \dfrac{\mathbf{T}}{4A_m^2 G}\displaystyle\int_{C_m}\frac{ds}{t}\,dx$

<u>**Solução**</u>:

Tem-se por equilíbrio um torque de 6**T** aplicado ao trecho AB e de **T** aplicado ao trecho BC. O trecho AB tem seção transversal quadrada cheia, portanto de lados a = b = d. Obtém-se para a/b = 1 na tabela que $\alpha = 0{,}208$ e $\beta = 0{,}141$. O trecho BC tem seção transversal quadrada de parede fina, de lado *d* = *0,1 m*, espessura *t* = *0,001 m*, perímetro $C_m = 4d = 0{,}4\,m$ e área compreendida pelo perímetro $A_m = d^2 = 0{,}01\,m^2$.

a) Rotação da seção C em relação à seção A: $\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = \dfrac{6\mathbf{T}\ell}{\beta d^4 G} + \dfrac{\mathbf{T}3\ell}{4\times d^4 G}\dfrac{4d}{t}$

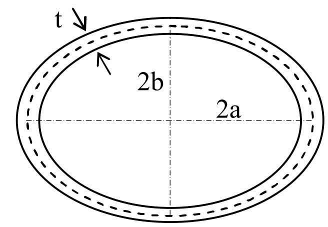
$$\therefore \phi_{AC} = \frac{6\times10\times10^3\times1}{0{,}141\times0{,}1^4\times80\times10^9} + \frac{10\times10^3\times3\times1}{4\times0{,}1^4\times80\times10^9}\,\frac{4\times0{,}1}{0{,}001} = 0{,}05319 + 0{,}375 = 0{,}42819\,rad$$

b) Tensão máxima no trecho AB: $\tau = \dfrac{6\mathbf{T}}{\alpha d^3} = \dfrac{6\times10\times10^{-3}}{0{,}208\times0{,}1^3} = 288{,}462\ MPa$

Tensão no trecho BC: $\tau = \dfrac{\mathbf{T}}{2d^2 t} = \dfrac{10\times10^{-3}}{2\times0{,}1^2\times0{,}001} = 500\ MPa$ $\qquad \boxed{\therefore \tau_{máx} = 500\ MPa}$

**3ª Questão (2,5 pontos)**

Um tubo de parede fina $(t \ll a)$ tem seção elíptica de semi-eixos a=2,95 e b = 1,15 (unidades de comprimento), conforme ilustrado. Compare a eficiência deste tubo, em termos da tensão máxima $\tau_{máx}$ que ocorre no tubo e da rotação $d\phi/dx$ entre seções, quando da aplicação de um torque, em relação a um outro de seção transversal circular de mesma área transversal e mesma espessura de parede $(t \ll r)$, ou seja, feito com a mesma quantidade de material.




A área de uma elipse é $A_m = \pi ab$ e sua circunferência é aproximadamente $C_m = \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$ (fórmula de Ramanujan).

Fórmulas relativas ao torque de um tubo de parede fina:

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \quad d\phi = \frac{T}{4A_m^2 G}\int_{C_m}\frac{ds}{t}\,dx$$

**<u>Solução</u>**:

Como o tubo circular e o tubo elíptico têm a mesma área de seção transversal (mesma quantidade de material), $2\pi rt = C_m t$. Para os valores atribuídos, $a = 2{,}95$ e $b = 1{,}15$, obtém-se $C_m = \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right] = 4{,}3\pi$ e, portanto, $2\pi r = 4{,}3\pi \quad \Rightarrow \quad r = 2{,}15$.

Tem-se para a tensão na seção elíptica:

$$\tau_{el} = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2\pi abt} = \frac{T}{2\pi r^2 t}\frac{r^2}{ab} = \tau_c \frac{r^2}{ab} = \tau_c \frac{2{,}15^2}{2{,}95 \times 1{,}15} \approx 1{,}36\tau_c$$

Tem-se para a rotação entre duas seções do tubo elíptico:

$$\frac{d\phi_{el}}{dx} = \frac{T}{4A_m^2 G}\int_{C_m}\frac{ds}{t} = \frac{T}{4\pi^2 a^2 b^2 Gt}4{,}3\pi = \frac{T}{2\pi r^3 Gt}\frac{r^4}{a^2 b^2} = \frac{d\phi_c}{dx}\frac{2{,}15^4}{2{,}95^2 \times 2{,}15^2} \approx 1{,}86\frac{d\phi_c}{dx}$$

já que, para o círculo, $\tau_c = \dfrac{T}{2\pi r^2 t}$ e $\dfrac{d\phi_c}{dx} = \dfrac{T}{2\pi r^3 Gt}$.

Portanto, o tubo de seção transversal elíptica apresenta tensão de cisalhamento cerca de 36% maior e rotação entre seções cerca de 86% maior que no tubo de seção transversal circular.

**4ª Questão (2,5 pontos)**
Um ventilador de teto comum tem uma potência de 1/6 hp e gira a uma velocidade de 420 rpm. Ele é sustentado por um tubo de PVC de raio externo r = 8 mm e espessura t = 1 mm. Calcular com que coeficiente de segurança o tubo está trabalhando, sabendo que a tensão máxima de cisalhamento a que o tubo de PVC deve resistir é 55 MPa.

Relação entre a potência (P) de um motor e o torque transmitido: $\mathrm{P}=2\pi n\mathrm{T}$, em que $n$ é a rotação do eixo (sistema internacional de unidades). Tem-se também que 1 *hp* = 745,7 *W*.

$$\tau(x,\rho)=\frac{T(x)G\,\rho}{2\pi\int_0^{r(x)}G\rho^3\mathrm{d}\rho}$$

**<u>Solução</u>**:

Torque transmitido pelo motor do ventilador: $\mathrm{T}=\dfrac{\mathrm{P}}{2\pi n}=\dfrac{1/6\times 745{,}7}{2\pi 420/60}\approx 2{,}83NM$

Tensão máxima aplicada ao tubo: $\tau_{máx}=\dfrac{2{,}83\times 0{,}008}{\pi/2\left(0{,}008^4-0{,}007^4\right)}Pa\approx 8{,}49MPa$

Coeficiente de segurança: $\dfrac{\tau_{adm}}{\tau_{máx}}=\dfrac{55}{8{,}49}\approx 6{,}5$