ENG 1007 – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Segunda prova – turma B 18/10/2012

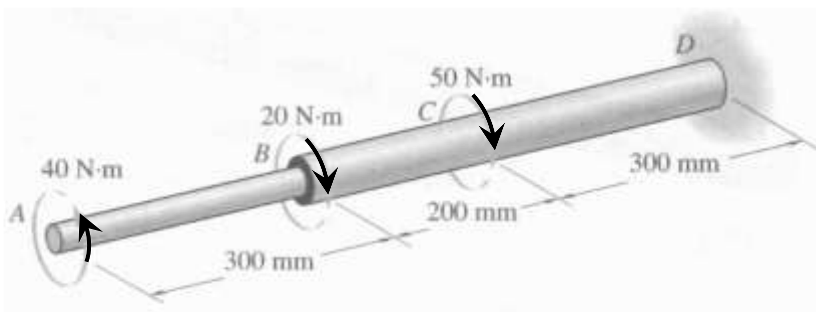
1ª Questão (2,5 pontos)

O eixo representado abaixo tem um trecho de seção maciça AB com raio de 15 mm, acoplado a um tubo BD com raio interno de 12,5 mm e externo de 25 mm. O eixo é feito de aço, com módulo de elasticidade transversal G = 75 GPa.

a) Traçar o gráfico de torques que ocorrem ao longo do eixo.
b) Determinar a máxima tensão de cisalhamento que ocorre no eixo.
c) Determinar a máxima rotação relativa que pode ocorrer entre duas das seções A, B, C e D.

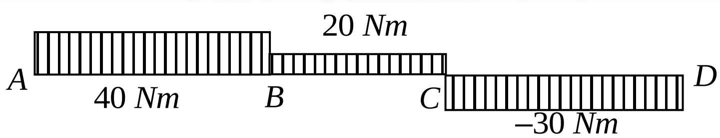
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T(x)}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$

$$\tau = \frac{T(x)G\,\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$



Soluçao:

a)



b) $$\tau_{AB} = \frac{40\ Nm \times 15\ mm}{\frac{\pi}{2}(15\ mm)^4} = 7{,}55\ MPa; \quad \tau_{CD} = \frac{30\ Nm \times 25\ mm}{\frac{\pi}{2}\left(25^4 - 12{,}5^4\right)mm^4} = 1{,}30\ MPa \Rightarrow \tau_{máx} = 7{,}55\ MPa$$

c) $$\Delta\varphi_{AB} = \frac{40\ Nm \times 300\ mm}{75\ GPa \times \frac{\pi}{2}(15\ mm)^4} = 0{,}0020\ rad$$

$$\Delta\varphi_{BC} = \frac{20\ Nm \times 200\ mm}{75\ GPa \times \frac{\pi}{2}\left(25^4 - 12{,}5^4\right)mm^4} = 0{,}000093\ rad$$

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{-30\ Nm \times 300\ mm}{75\ GPa \times \frac{\pi}{2}\left(25^4 - 12{,}5^4\right)mm^4} = \text{-}0{,}00021\ rad$$

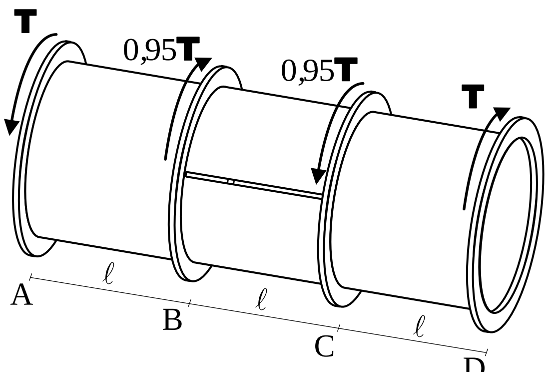
$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi_{máx} = \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{BC} = 0{,}0021\ rad \quad \left(\text{entre as seções A e C, no sentido do vetor em A}\right)$$

2ª Questão (2,5 pontos)

O tubo abaixo tem três segmentos, todos eles feitos do mesmo material (módulo de elasticidade transversal G), de mesmo comprimento ℓ e mesma seção transversal circular de raio r e parede de espessura $t = r/20$, ou seja, $t << r$. O segmento BC tem um corte longitudinal, conforme indicado, não podendo ser classificado topologicamente como de seção transversal circular, embora a área da seção transversal seja numericamente igual à da dos outros segmentos. Nos anéis de reforço das seções A, B, C e D são aplicados momentos de torção auto-equilibrados, conforme indicado na figura. Calcular:

a) a rotação da seção D em relação à seção A;

b) a máxima tensão de cisalhamento no tubo.



Fórmulas para eixo de seção transversal circular:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T(x)}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$

$$\tau = \frac{T(x)G\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$

Fórmulas para eixo de seção transversal retangular:

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha ab^2} \qquad \Delta\phi = \frac{TL}{\beta ab^3 G}$$

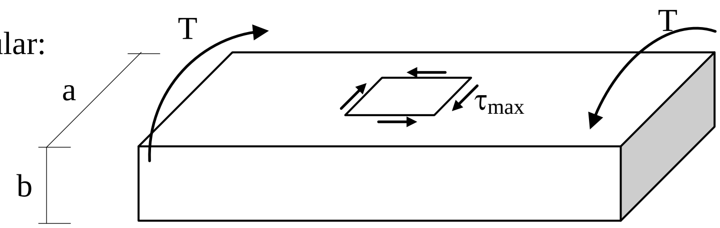


Tabela para obtenção dos coeficientes α e β

a/b	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
α	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333
β	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333

<u>Solução</u>:

- Segmentos AB e CD: Torque atuante $\mathbf{T}$, seção transversal circular de parede fina.
- Segmento BC: Torque atuante $\mathbf{T} - 0{,}95\mathbf{T} = \mathbf{T}/20$, seção transversal aberta com largura $a = 2\pi r$ e altura $b = t = r/20$.
- Como $t << r$, tem-se na tabela dada, para $a/b \to \infty$, $\alpha = \beta = 0{,}333 \approx 1/3$.

a) Rotação relativa entre as seções A e D: $\phi_{AD} = 2 \times \dfrac{\mathbf{T}\ell}{2\pi r^3 tG} + \dfrac{\mathbf{T}\ell/20}{\frac{1}{3}2\pi r t^3 G}$

Sendo $t = r/20$, $\phi_{AD} = \dfrac{20\mathbf{T}\ell}{\pi r^4 G} + \dfrac{3\mathbf{T}\ell \times 20^2}{2\pi r^4 G} = \dfrac{620\mathbf{T}\ell}{\pi r^4 G}$

b) Tensão em qualquer ponto dos segmentos AB e CD: $\tau_{AB,CD} = \dfrac{\mathbf{T}}{2\pi r^2 t} = \dfrac{\mathbf{T} \times 20}{2\pi r^3} = \dfrac{10\mathbf{T}}{\pi r^3}$

Tensão em qualquer ponto do segmento BC: $\tau_{BC} = \dfrac{\mathbf{T}/20}{\frac{1}{3}2\pi r t^2} = \dfrac{3\mathbf{T} \times 20}{2\pi r^3} = \dfrac{30\mathbf{T}}{\pi r^3}$ $\quad \boxed{\therefore\ \tau_{máx} = \dfrac{30\mathbf{T}}{\pi r^3}}$

3ª Questão (2,5 pontos)

Um tubo de parede fina $(t \ll d)$ tem seção quadrada de lado *d*. Compare a eficiência deste tubo, em termos da tensão máxima $\tau_{máx}$ que ocorre no tubo e da rotação $d\phi/dx$ entre seções, quando da aplicação de um torque, em relação a um outro de seção transversal circular de mesma área transversal e mesma espessura de parede $(t \ll r)$, ou seja, feito com a mesma quantidade de material.

Fórmulas relativas ao torque de um tubo de parede fina:

$$\tau = \frac{\mathrm{T}}{2\mathrm{A_m t}} \quad \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{T}}{4\mathrm{A_m^2 G}} \int_{\mathrm{C_m}} \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dx}$$

<u>Solução</u>:

Como o tubo circular e o tubo quadrado têm a mesma área de seção transversal (mesma quantidade de material), $2\pi rt = 4dt$. Portanto, $d = \pi r/2$

Tem-se para a tensão na seção quadrada:

$$\tau_q = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2d^2 t} = \frac{2T}{\pi^2 r^2 t} = \frac{T}{2\pi r^2 t}\frac{4}{\pi} = \tau_c \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27\,\tau_c$$

Tem-se para a rotação entre duas seções do tubo de seção quadrada:

$$\frac{d\phi_q}{dx} = \frac{T}{4A_m^2 G}\int_{C_m}\frac{ds}{t} = \frac{T}{4d^4 Gt}4d = \frac{8T}{\pi^3 r^3 Gt} = \frac{T}{2\pi r^3 Gt}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \approx 1{,}62\frac{d\phi_c}{dx}$$

já que, para o círculo, $\tau_c = \dfrac{T}{2\pi r^2 t}$ e $\dfrac{d\phi_c}{dx} = \dfrac{T}{2\pi r^3 Gt}$.

Portanto, o tubo de seção transversal quadrada apresenta tensão de cisalhamento cerca de 27% maior e rotação entre seções cerca de 62% maior que no tubo de seção transversal circular.

4ª Questão (2,5 pontos)

Um eixo está submetido a torques que variam trecho a trecho ao longo de seu comprimento, conforme representado na figura abaixo. O eixo se compõe de três tubos, de seções transversais circulares:

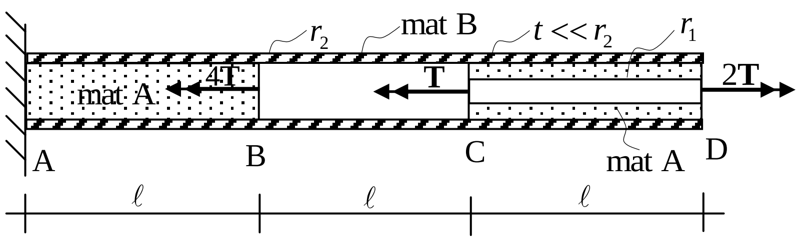
- há um tubo de raio r_2 e espessura $t << r_2$, feito de um material B (módulo de elasticidade G_B), que se estende ao longo de todo o eixo;
- há um tubo de material A (módulo de elasticidade G_A) no trecho AB, de seção cheia de raio r_2;
- e há um tubo de mesmo material A no trecho CD, de seção transversal vazada de raio interno r_1 e externo r_2.

Sabe-se que $G_B = 50\ G_A$, $t = r_2/100$, $r_1 = r_2/2$.

Traçar o diagrama de torque aplicado a cada um dos trechos AB, BC e CD e em seguida calcular:

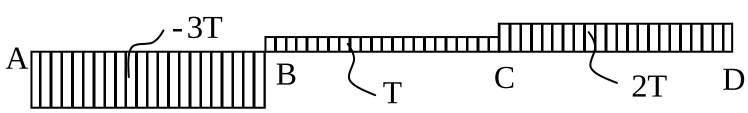
a) a rotação sofrida pela extremidade do eixo em relação ao seu engaste;
b) as tensões de cisalhamento máximas a que cada material está submetido.

$$\tau(x,\rho) = \frac{T(x)G\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 \mathrm{d}\rho} \qquad \phi_\ell - \phi_0 = \int_0^\ell \frac{T(x)}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 \mathrm{d}\rho} dx$$



<u>Solução</u>:

Diagrama de torques aplicados (supondo que o torque aplicado em D seja positivo):



a) Rotação sofrida pela extremidade do eixo em relação ao seu engaste (positiva no sentido do torque aplicado em D):

$$\Delta\phi = \frac{-3T\ell}{\pi G_A r_2^4/2 + 2\pi G_B r_2^3 t} + \frac{T\ell}{2\pi G_B r_2^3 t} + \frac{2T\ell}{\pi G_A\left(r_2^4/2 - r_1^4/2\right) + 2\pi G_B r_2^3 t}$$

Para os dados do problema: $\Delta\phi = \dfrac{17T\ell}{47\pi G_A r_2^4} \approx 0{,}1151\dfrac{T\ell}{G_A r_2^4}$

b) Tensões de cisalhamento máximas a que cada material está submetido (em módulo):

Trecho AB: $\sigma_A^{AB} = \dfrac{3TG_A r_2}{\pi G_A r_2^4/2 + 2\pi G_B r_2^3 t} = \dfrac{2T}{\pi r_2^3}$ $\qquad \sigma_B^{AB} = \dfrac{3TG_B r_2}{\pi G_A r_2^4/2 + 2\pi G_B r_2^3 t} = \dfrac{100T}{\pi r_2^3}$

Trecho BC: $\sigma_B^{BC} = \dfrac{T}{2\pi r_2^2 t} = \dfrac{50T}{\pi r_2^3}$

Trecho CD:

$$\sigma_A^{CD} = \frac{2TG_A r_2}{\pi G_A\left(r_2^4/2 - r_1^4/2\right) + 2\pi G_B r_2^3 t} = \frac{64T}{47\pi r_2^3} \approx 0{,}4334\frac{T}{r_2^3}$$

$$\sigma_B^{CD} = \frac{2TG_B r_2}{\pi G_A\left(r_2^4/2 - r_1^4/2\right) + 2\pi G_B r_2^3 t} = \frac{3200T}{47\pi r_2^3} \approx 21{,}67\frac{T}{r_2^3}$$

Portanto, as tensões máximas são as atuantes no trecho AB.