PUC-RIO – CB-CTC

P2 DE ELETROMAGNETISMO – 23.10.13 – quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,5		
3ª Questão	3,0		
Total	10,0		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário:

<u>Volumes</u>: $\frac{4}{3}\pi R^3$ (Esfera de raio R)

$\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

<u>Superfícies</u>: $4\pi R^2$ (Esfera de raio R)

$2\pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

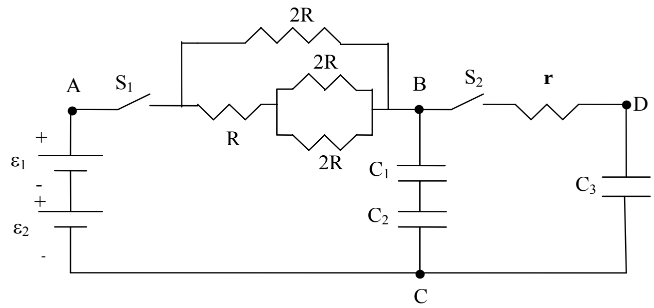
$$\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

1ª Questão (3,5)

No circuito da figura, os capacitores C_1, C_2 e C_3 têm as seguintes propriedades:

- C_1 e C_2 : inicialmente descarregados, ambos com meio de constante dielétrica k = 5 e capacitância de 2×10^{-9} F.
- C_3 : carga inicial de 10^{-9} C, tipo placas paralelas com vácuo entre elas e de capacitância igual a 10^{-10} F.



Neste circuito, ocorrem as seguintes fases sucessivas:

- Fase 1: chave S_1 fechada e S_2 aberta durante longo tempo.
- Fase 2: chaves S_1 e S_2 abertas, o meio dielétrico de C_1 e C_2 é substituído por vácuo e a separação das placas de C_3 é alterada.
- Fase 3: chave S_1 aberta e S_2 fechada durante longo tempo.

Considerando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5$ V, R = 1 kΩ e r = 10 kΩ , determine:

a) (**1,0**) As d.d.p. $V_A – V_B$, $V_B – V_C$ e $V_D – V_C$ em função do tempo durante a fase 1.

b) (**0,8**) A carga em C_1 e C_2 no final da fase 1.

c) (**0,9**) Qual deve ser o aumento da separação das placas de C_3 durante a fase 2 para que a <u>corrente no resistor **r** seja nula durante toda a fase 3.</u>

d) (**0,8**) A diferença entre a energias armazenadas em C_3 na fase 1 e no final da fase 2.

<u>SOLUÇÃO</u>

a) **Fase1**: carregamento de C_1 e C_2 em série;

circuito simplificado na fase1 implica em $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon 2 = 10$ V **,** $R_{eq} = R = 1$ KΩ e $Ceq = 10^{-9}$ F

$\mathbf{(V_B – V_C)(t)} = 10\,(1 - e^{-t/R_{eq}C_{eq}}) = \mathbf{10\,(1 - e^{-1000t})\ \ V}$

$(V_A – V_B)(t) = R_{eq}\, i(t)$; $i(t) = i(0)\, e^{-t/R_{eq}C_{eq}}$

início da fase 1: C_1 e C_2 sem carga (equivalente a um “ curto”)

$\Rightarrow i(0) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / R_{eq} = 10/1=10$ mA $\Rightarrow \mathbf{(V_A – V_B)(t) = 10\, e^{-1000\,t}\ \ V}$

$\mathbf{V_D – V_C} = q_3 / C_3 = 10^{-9} / 10^{-10} \mathbf{= 10\ V}$

b) final da fase 1 com C_1 e C_2 em série e plenamente carregados:

$\Rightarrow \mathbf{q1 = q2 = q_{eq} = (\varepsilon_1 + \varepsilon 2)\, Ceq = 10^{-8}\ C}$

c) final da fase 2 $\Rightarrow$ substituição do meio dielétrico $\Rightarrow C'_1 = C'_2 = (2 \times 10^{-9})/5 \Rightarrow C_{eq} = 10^{-9}/5$ **;**

conservação da carga $\Rightarrow q_{eq} = 10^{-8}$ C $\Rightarrow V_B – V_C = q_{eq} / C_{eq} = 5 \times 10 = 50$ V

<u>corrente nula em r</u> na fase 3 $\Rightarrow V_{C3} = V_B – V_C = 50\ V = q3 / C'_3 = 10^{-9} / C'_3 \Rightarrow C'_3 = C_3/5$;

capacitor de placas paralelas : $C_3 \propto 1/$ separação das placas $\Rightarrow$ **aumento de 5 vezes na separação das placas**

d) fase1: $U_3 = ½ (q_3)^2 / C_3 = 5 \times 10^{-9}$ J

final da fase 2: $U_3 = ½ (q_3)^2 / C'_3 = 25 \times 10^{-9}$ J $\Rightarrow$ **$\Delta U = 20 \times 10^{-9}$ J**

2ª Questão: (3,5)

A Fig. 1 mostra um <u>segmento</u> retilíneo de comprimento L de um fio que conduz corrente *i* no sentido +*z*. O centro do segmento está na origem. Um ponto P está sobre o eixo *y* à distância *d* da origem.

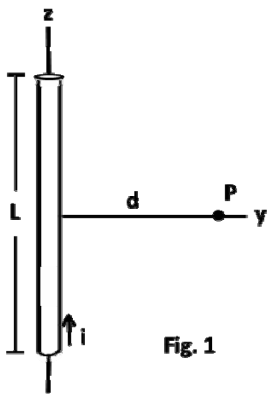


Fig. 1

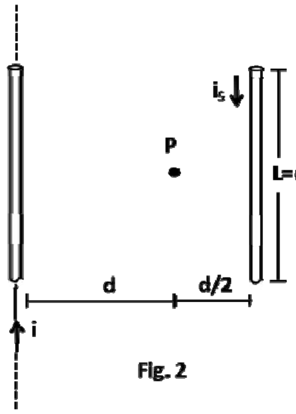


Fig. 2

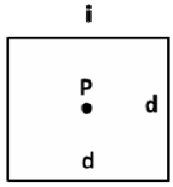


Fig. 3

a) (**1,5**) Mostre, <u>utilizando explicitamente</u> a lei de Biot-Savart, que o <u>vetor</u> campo magnético em P devido a todo o segmento é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi\, d} \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L^2}{4} + d^2\right)}} (-\hat{x})$$

Considere agora a Fig. 2 que mostra um ponto P à distância *d* de um <u>fio infinito com corrente *i*</u>. O módulo do campo magnético devido ao fio infinito no ponto P é dado por $B_0 = \frac{\mu_0\, i}{2\,\pi\, d}$. A figura mostra também um <u>segmento retilíneo com corrente i_S</u> antiparalela a *i*. O segmento tem comprimento $L = d$ e está simetricamente disposto em relação ao ponto *P* e dista *d/2* dele.

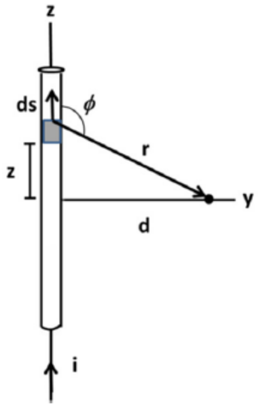
b) (**1,0**) Quanto deve valer a corrente i_S para que o módulo do campo total em P seja $3B_0$?

Considere agora a Fig. 3 que mostra uma espira quadrada de lado *d* que conduz uma corrente de valor *i*. A espira é centrada em *P*.

c) (**1,0**) <u>Utilizando o resultado do item (a)</u>, calcule o módulo do campo magnético em *P* em função de μ_0, *d* e *i*. A corrente *i* deve circular na espira no sentido <u>horário ou anti-horário</u> para que o campo em *P* tenha sentido saindo do papel?

SOLUÇÃO

a. **(1,5 ptos)**



$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{dz\, sen\varphi\ (-\hat{x})}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dz\ \frac{\frac{d}{r}}{r^2}(-\hat{x}) =$$

$$\frac{\mu_0 i d}{4\pi}(-\hat{x})\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dz\ \left(z^2+d^2\right)^{-3/2} = \frac{\mu_0 i d}{4\pi}(-\hat{x})\left[\frac{z}{d^2\sqrt{z^2+d^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d}\frac{L}{\sqrt{L^2/4+d^2}}(-\hat{x})}$$

b. **(1,0 pto)** Pela regra da mão direita, o sentido do campo em *P* gerado pelo segmento é o mesmo do campo B_0 gerado pelo fio infinito. Assim, o módulo do campo total é a soma dos dois módulos:

$$B_{TOT} = B_0 + B_{SEGMENTO} = 3B_0 \quad \rightarrow \quad B_{SEGMENTO} = 2B_0$$

A seguir, reescrevemos essa igualdade usando a expressão fornecida no item (a), adaptando-a para o nosso segmento:

$$\frac{\mu_0 i_S}{4\pi\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{d}{\sqrt{(d^2/4+d^2/4)}} = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \quad \rightarrow \quad i_S\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2i \quad \rightarrow \quad \boxed{i_S = \sqrt{2}i}$$

c. **(1,0 pto)** Pela regra da mão direita, para termos um campo total saindo do papel, *i* deve circular na espira no sentido **anti-horário**. O seu módulo dá-se usando a expressão fornecida no item (a), adaptando-a para a nossa espira que é composta de 4 segmentos:

$$B_{ESPIRA} = 4B_{SEGMENTO} = 4\frac{\mu_0 i}{4\pi\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{d}{\sqrt{(d^2/4+d^2/4)}} = \frac{2\mu_0 i}{\pi d}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{B_{ESPIRA} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi d}}$$

3ª Questão: (3,0)

Parte I.

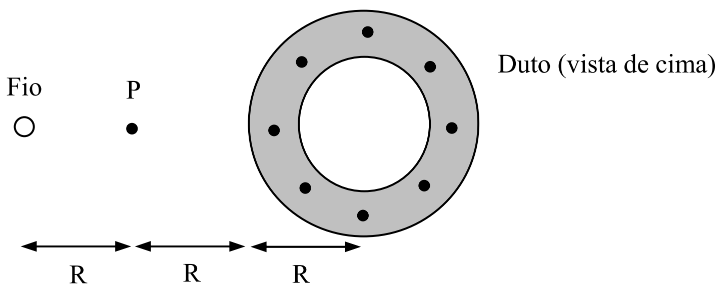
Em uma determinada região existe uma <u>densidade de corrente</u> uniforme de 30 A/m^2 no sentido positivo do eixo z.

a) (**1,5**) Qual é o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ quando a integral de linha é tomada ao longo do contorno amperiano formado pelos três segmentos de linha reta que conectam, consecutivamente, os pontos (2d,0,0), (2d,3d,0), (0,0,0) e (2d,0,0), onde d = 30 cm?

Parte II.

Um duto cilíndrico muito longo, com um raio externo R, conduz uma corrente (uniformemente distribuída) i_0 (no sentido saindo da página, veja a figura abaixo). Um fio infinito corre paralelo ao duto a uma distancia 3R de centro a centro.

b) (**1,5**) Calcule a intensidade (em termos de i_0), a direção e o sentido da corrente i' que deve passar no fio para que o campo magnético em P seja nulo.



SOLUÇÃO

Parte I.

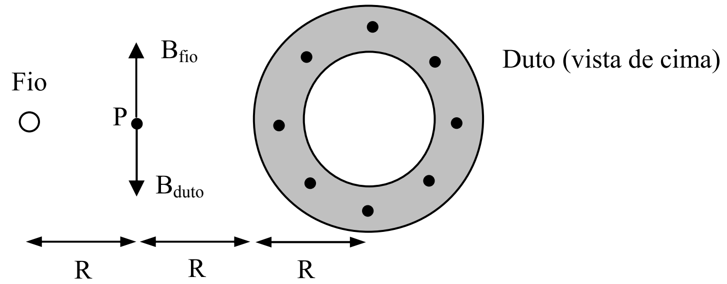
a) A lei de Ampere estabelece que $\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \, I$, onde I é a corrente que atravessa a área do caminho de integração. Neste caso, como a corrente esta no sentido positivo de z e o sentido do caminho de integração junto com a regra da mão direita faz com que a corrente que atravessa a área seja positiva. Para calcular a corrente temos que multiplicar a densidade de corrente J pela área do triangulo. Assim:

$$I = +J \cdot área = J \cdot (2d) \cdot (3d)/2 = 3 \cdot J \cdot d^2 = 3 \cdot 30 \cdot 0{,}3^2 = 8{,}1\ A \quad \text{portanto:}$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \, I = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}1 = 102 \cdot 10^{-7}\ Tm$$

Parte II.

b) Como a corrente no duto aponta para fora da folha, então no ponto P ele produz um campo que é perpendicular à linha que liga o centro do duto ao ponto P e no sentido para baixo. Se queremos que a corrente no fio produza um campo magnético que seja nulo no ponto P a única possibilidade é que a corrente no fio também esteja no **sentido para fora do folha**, caso contrario todos os campos iram apontar no mesmo sentido.



Neste caso, no ponto P o duto produz um campo que **aponta para baixo** com modulo ($\mu_0.i_0/4\pi R$), enquanto que o fio produz em P um campo que **aponta para cima** com modulo ($\mu_0.i'/2\pi R$). Como queremos que o campo resultante no ponto P seja nulo**,** então :

$$(\mu_0.i_0/4\pi R) - (\mu_0.i'/2\pi R) = 0 \rightarrow \mathbf{i' = i_0 / 2}$$