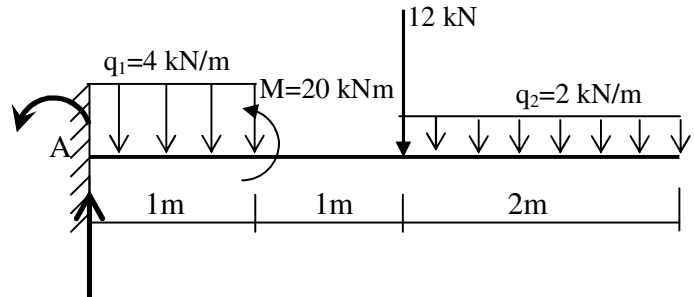


**1ª Questão (2,5 pontos)**

Calcular as reações de apoio da viga ao lado.

**Resposta:**

$$R_A = 20kN \text{ e } M_A = 18kNm$$

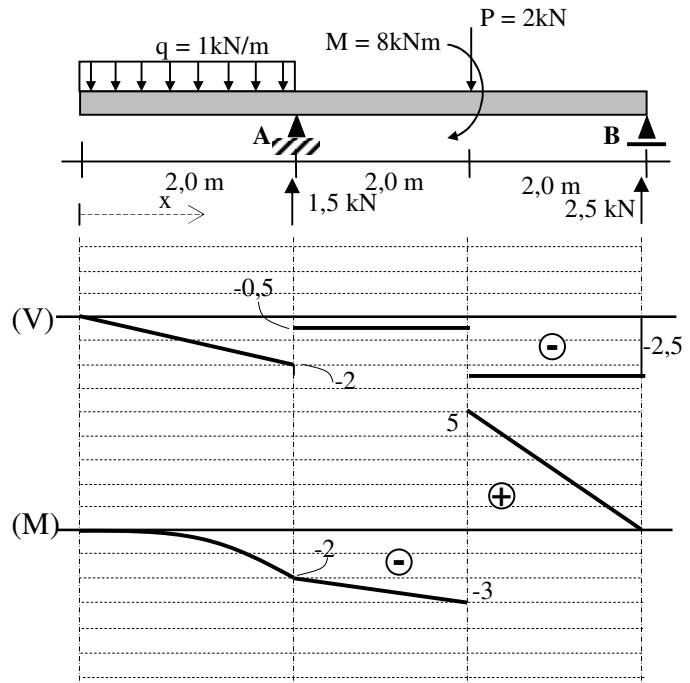
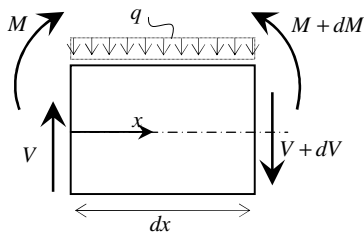


**2ª Questão (2,5 pontos)**

As reações de apoio da viga na figura ao lado são  $R_A = 1,5kN$  e  $R_B = 2,5kN$ .

Determinar as expressões e traçar os diagramas de esforço cortante e momento de flexão.

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$



**Resposta:**

Expressão analítica do esforço cortante (em kN):

$$0 \leq x < 2: V(x) = -x$$

$$2 < x < 4: V(x) = -0,5$$

$$4 < x < 6: V(x) = -2,5$$

Expressão analítica do momento fletor (em kNm):

$$0 \leq x \leq 2: M(x) = -0,5x^2$$

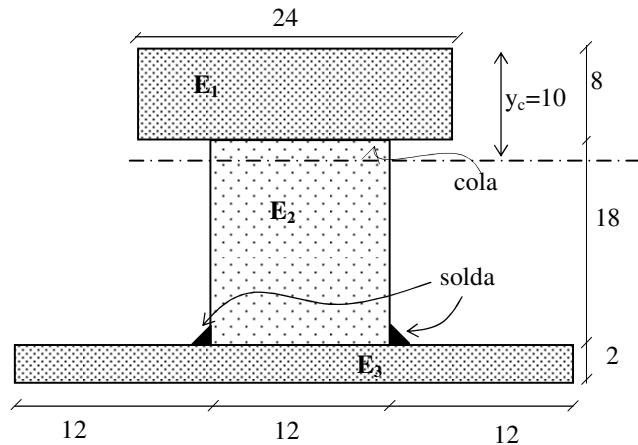
$$2 \leq x < 4: M(x) = -0,5x - 1$$

$$4 < x \leq 6: M(x) = -2,5x + 15$$

**3ª Questão (2,5 pontos)**

A figura ao lado esquematiza a seção transversal de uma viga, com as dimensões em cm. Os módulos de elasticidade dos materiais são  $E_1 = 45 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 10 \text{ GPa}$  e  $E_3 = 30 \text{ GPa}$ . As peças estão soldadas entre si na junta inferior e coladas na junta superior. Calcular:

- onde passa a linha neutra da seção transversal;
- a expressão  $\int_A E y^2 dA$  do módulo de rigidez da seção transversal.



**Resposta:**

Toma-se o material 2 como referência:

$$n_1 = E_1/E_2 = 4,5, \quad n_3 = E_3/E_2 = 3.$$

Posição da linha neutra  $z$  (distância  $y_c$  a partir do topo da seção transversal):

$$y_c = \frac{4,5 \times 24 \times 8 \times 4 + 18 \times 12 \times 17 + 3 \times 36 \times 2 \times 27}{4,5 \times 24 \times 8 + 18 \times 12 + 3 \times 36 \times 2} = 10 \text{ cm}$$

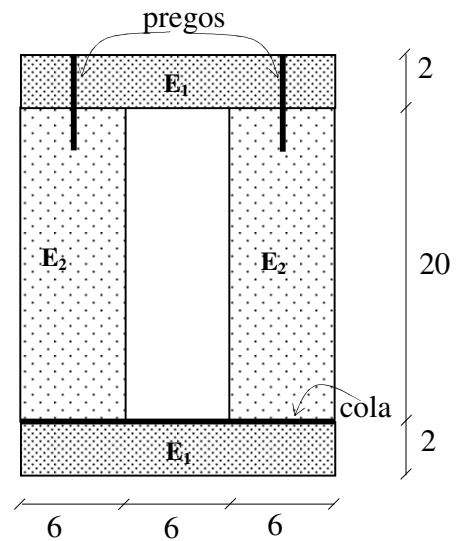
Integral  $\int_A E y^2 dA \equiv E_2 I_{eq}$  da seção em relação a  $z$ :

$$\int_A E y^2 dA = E_2 \left[ 4,5 \times 24 \left( \frac{8^3}{12} + 8 \times 6^2 \right) + 12 \left( \frac{18^3}{12} + 18 \times 7^2 \right) + 3 \times 36 \left( \frac{2^3}{12} + 2 \times 17^2 \right) \right] = E_2 I_{eq}$$

onde  $I_{eq} = 114.192 \text{ cm}^4 = 114.192 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ .

#### 4ª Questão (2,5 pontos)

A figura ao lado esquematiza a seção transversal de uma viga, composta por duas vigotas de madeira de seção  $18 \times 2 \text{ cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E_1 = 20 \text{ GPa}$ , dispostas horizontalmente, separadas por duas outras vigotas de madeira de seção  $6 \times 20 \text{ cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E_2 = 10 \text{ GPa}$ . As peças de madeira estão coladas entre si, na junção inferior, e pregadas na junção superior. A tensão máxima admissível de cisalhamento da cola é  $\tau_{cola}^{adm} = 350 \text{ kPa}$ . Sabendo que a seção está solicitada por um esforço cortante  $V = 4 \text{ kN}$  e um momento de flexão  $M = 20 \text{ kNm}$ , calcular



- o coeficiente de segurança da cola;
- a tensão normal máxima no material 1;
- a tensão normal máxima no material 2.

$$\sigma_x = \frac{MEy}{\int_A Ey^2 dA} \quad \tau_{xy} = \frac{V \int_y^{y_{máx}} Ey dA}{b \int_A Ey^2 dA}$$

Devido à simetria, a linha neutra passa exatamente pelo meio da seção:  $\bar{y} = 12 \text{ cm}$ .

Tomando-se o material 2 como referência,  $n = \frac{E_1}{E_2} = 2$ .

Rigidez da seção transversal:  $\int_A Ey^2 dA = \left[ 2 \left( \frac{18 \times 24^3}{12} - \frac{18 \times 20^3}{12} \right) + \frac{12 \times 20^3}{12} \right] E_2 = 25472 \text{ cm}^4 E_2$

Dado para cálculo de tensões na seção  $y = 10 \text{ cm}$ :  $\int_{10}^{12} Ey dA = 2E_2(2 \times 18) \times 11 = 792 \text{ cm}^3 E_2$

a) Tensão na cola:

$$\tau_{xy}^{cola} = \frac{V \int_{10}^{12} Ey dA}{b \int_A Ey^2 dA} = \frac{4 \text{ kN} \times 792 E_2}{12 \times 25472 E_2 \text{ cm}^2} = \frac{4 \times 792}{12 \times 25472} 10^7 \text{ N} = 103,64 \text{ kPa}$$

$$\therefore \text{Coeficiente de segurança da cola} = \frac{350}{103,64} = 3,37$$

b) tensão normal máxima no material 1 (para  $y = 12 \text{ cm}$ ):

$$\sigma_{máx}^1 = \frac{20 \text{ kNm} \times E_1 \times 12 \text{ cm}}{25472 \text{ cm}^4 E_2} = 18,844 \text{ MPa}$$

c) tensão normal máxima no material 2 (para  $y = 10 \text{ cm}$ ):

$$\sigma_{máx}^2 = \frac{20 \text{ kNm} \times E_2 \times 10 \text{ cm}}{25472 \text{ cm}^4 E_2} = 7,852 \text{ MPa}$$