# PUC-RIO – CB-CTC

**FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO –25.03.14 –terça-feira**

Nome :______________________________________________________________

Assinatura: __________________________________________________________

Matrícula:_____________________________________Turma:_______________

**<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>**

## Não é permitido destacar folhas da prova

| **Questão** | **Valor** | **Grau** | **Revisão** |
|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 3,5 | | |
| 2ª Questão | 3,5 | | |
| 3ª Questão | 3,0 | | |
| Total | 10,0 | | |

**<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>**

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N\ m^2}{C^2}$$

Superfície esfera = $4\pi\ R^2$

Volume esfera = $\frac{4}{3}\pi\ R^3$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

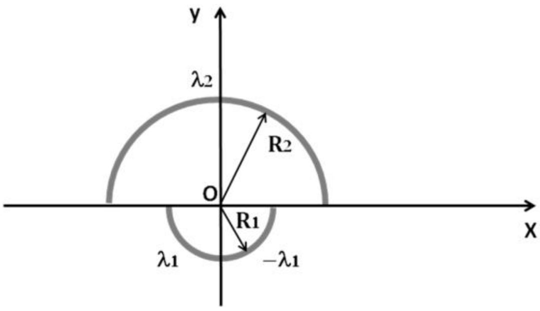
$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

**FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO – 25.03.14 – terça-feira**

**1ª Questão: (3,5)**

Considere os dois semicírculos concêntricos de material isolante representados na figura abaixo. O semicírculo com raio $\mathbf{R_2}$ tem densidade linear de carga positiva $\boldsymbol{\lambda_2}$, enquanto o semicírculo menor tem raio $\mathbf{R_1}$ e duas densidades lineares de carga: $\boldsymbol{\lambda_1}$ (positiva) para pontos com coordenada **x** negativa e $\boldsymbol{-\lambda_1}$ (negativa) para pontos com coordenada **x** positiva. Os raios e as densidades lineares das duas distribuições de carga são tais que vale a relação $\left|\dfrac{\lambda_1}{R_1}\right| = \left|\dfrac{\lambda_2}{R_2}\right|$.




a) (**1,0**) Calcule o vetor campo elétrico gerado pelo semicírculo menor no ponto O (origem dos eixos e centro dos semicírculos)

b) (**1.0**) Calcule o vetor campo elétrico gerado pelo semicírculo maior no ponto O.

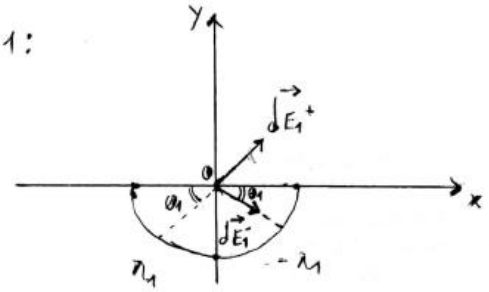
c) (**0.5**) Calcule o vetor do campo elétrico resultante no ponto O e escreva seu módulo.

d) (**1.0**) Calcule as coordenadas da posição na qual deve ser colocada uma carga puntiforme negativa de valor $q = -2\sqrt{2}\lambda_2 R_2$ para que o campo elétrico total resultante no ponto O seja nulo.

**SOLUÇÃO**

QUESTÃO 1:

a)

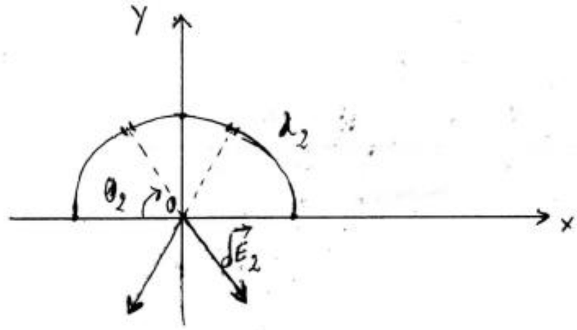



$$|d\vec{E}_1^+| = |d\vec{E}_1^-| = \frac{k\,|dq_1|}{R_1^2} = \frac{k\lambda_1}{R_1}\,d\theta_1$$

$$dE_{1x} = \cos\theta_1\,|d\vec{E}_1^+| = \frac{k\lambda_1}{R_1}\cos\theta_1\,d\theta_1$$

$$\vec{E}_1 = 2\int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda_1}{R_1}\cos\theta_1\,d\theta_1\,\hat{\imath} = \left(2k\frac{\lambda_1}{R_1}\right)\hat{\imath}$$

b)

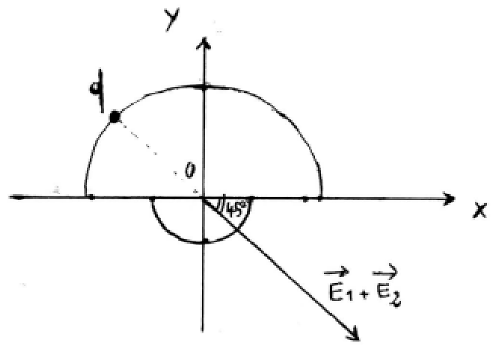



$$|d\vec{E}_2| = \frac{k\,dq_2}{R_2^2} = \frac{k\lambda_2}{R_2}\,d\theta_2 \qquad d\vec{E}_{2_y} = -\frac{k\lambda_2}{R_2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,d\theta_2\,\hat{j}$$

$$\vec{E}_2 = -\int_0^{\pi} \frac{k\lambda_2}{R_2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,d\theta_2\,\hat{j} = -\frac{2k\lambda_2}{R_2}\,\hat{j}$$

c) $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dfrac{2k\lambda_2}{R_2}(\hat{i} - \hat{j}) \qquad |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| = \sqrt{2}\,\dfrac{2k\lambda_2}{R_2}$

d)




$$|\vec{E}_q| = \frac{kq}{d^2} = \frac{2\sqrt{2}\,k\lambda_2 R_2}{d^2}$$

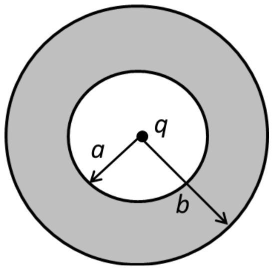
$$|\vec{E}_q| = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| \Rightarrow \cancel{2\sqrt{2}\,k\lambda_2}\frac{R_2}{d^2} = \cancel{\sqrt{2}\,2\,k\lambda_2}\frac{1}{R_2} \Rightarrow d = R_2$$

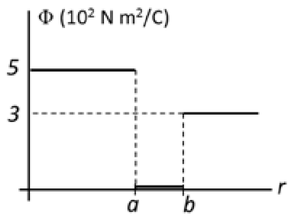
SENDO A CARGA q NEGATIVA, ELA TEM SER COLOCADA NA POSIÇÃO

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}R_2\,;\,+\frac{\sqrt{2}}{2}R_2\right)$$

**2ª Questão: (3,5)**

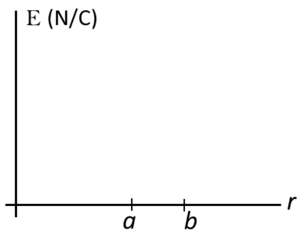
Uma partícula com carga $q$ foi depositada bem no centro da cavidade de uma casca esférica condutora de raio interno $a = 30\ cm$ e raio externo $b = 40\ cm$ (figura abaixo). O gráfico ao lado da figura mostra o fluxo $\Phi$ através de uma esfera gaussiana com centro na partícula em função do raio $r$ da esfera.
(Considere $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-11}\ C^2/N\ m^2$ ou $k = 9 \times 10^9\ N\ m^2/C^2$.)




a) (**1,3**) Determine a carga $q$ da partícula central e a carga líquida $Q_{LÍQ}$ presente na casca condutora.

b) (**1,2**) Considere agora que: $q = +5\ nC$ e $Q_{LÍQ} = -2\ nC$. Encontre a dependência do campo elétrico $E(r)$ como função de $r$, para as três regiões: $r < a$, $a < r < b$, e $r > b$. Depois, copie na folha de respostas o par de eixos a seguir e esboce nele a função $E(r)$ encontrada, calculando os valores importantes e explicitando-os no gráfico.




c) (**1,0**) Remove-se a partícula e a cavidade é preenchida com um material isolante. A carga no isolante apresenta simetria esférica e densidade volumétrica dada pela função $\rho(r) = A/r$, onde A é uma constante. Esta distribuição de carga provoca um campo elétrico radial e de módulo constante e igual a $E = 500\ N/C$ dentro da cavidade. Calcule o valor da constante $A$ com sua respectiva unidade $SI$.

**SOLUÇÃO**

a) Usaremos nas três regiões a Lei de Gauss:

$$\Phi = \frac{q_{engl}}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{q_{engl} = \epsilon_0 \Phi}$$

<u>*r* < *a*</u>:

$$q = (1 \cdot 10^{-11})(5 \cdot 10^{2}) \quad \rightarrow \quad \boxed{q = 5\ nC}$$

<u>*a* < *r* < *b*</u>:

$$q_1 = (1 \cdot 10^{-11})(0) \quad \rightarrow \quad q_1 = 0.$$

Mas a gaussiana com raio *a* < *r* < *b* engloba tanto a partícula de carga *q* quanto a carga na superfície interna da casca, que chamaremos $q_a$:

$$q_1 = q + q_a \quad \rightarrow \quad 0 = 5 + q_a \quad \rightarrow \quad q_a = -5\ nC.$$

<u>*r* > *b*</u>:

$$q_2 = (1 \cdot 10^{-11})(3 \cdot 10^{2}) \quad \rightarrow \quad q_2 = 3\ nC.$$

Mas a gaussiana com raio *r* > *b* engloba a partícula, a carga $q_a$, e também a carga na superfície externa da casca, que chamaremos $q_b$:

$$q_2 = q + q_a + q_b \quad \rightarrow \quad 3 = 5 + (-5) + q_b \quad \rightarrow \quad q_b = 3\ nC.$$

Logo, a carga líquida na casca condutora vale:

$$Q_{LÍQ} = q_a + q_b = -5 + 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{Q_{LÍQ} = -2\ nC}$$

b) <u>*r* < *a*</u>: Qualquer gaussiana nesta região fornece um campo elétrico decrescente com o quadrado de *r*. Logo:

$$\boxed{E(r) = \frac{kq}{r^2}}$$

Para *r* = *a* = *30 cm*, teremos o valor:

$$E(a) = \frac{kq}{a^2} = \frac{(9 \cdot 10^{9})(5 \cdot 10^{-9})}{(30 \cdot 10^{-2})^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{E(a) = 500\ N/C}$$

<u>*a* < *r* < *b*</u>: Neste caso estamos dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático. Assim:

$$\boxed{E_{condutor} = 0}$$

<u>*r* > *b*</u>: Novamente teremos:

$$\boxed{E(r) = \frac{kq_{eng}}{r^2}}$$

Onde, agora, $q_{eng} = 3\ nC$. Para $r = b = 40\ cm$, teremos o valor:

$$E(b) = \frac{kq_{eng}}{b^2} = \frac{(9 \cdot 10^9)(3 \cdot 10^{-9})}{(40 \cdot 10^{-2})^2} \quad \rightarrow \quad E(b) = 168{,}75\ N/C \quad \rightarrow \quad \boxed{E(b) \cong 170\ N/C}$$

c) Trabalhemos paralelamente nos dois membros da lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\int \rho\, dV}{\epsilon_0}$$

Pela simetria esférica, o módulo do campo é constante, e concluímos também tanto que o vetor campo é paralelo ao vetor elemento de área, quanto $dV = 4\pi r^2 dr$. Assim:

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r (A/r')\, 4\pi r'^2 dr'$$

$$Er^2 = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{r^2}{2} \quad \rightarrow \quad A = 2\epsilon_0 E = 2(1 \cdot 10^{-11})500 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 1 \cdot 10^{-8}\ C/m^2}$$

A unidade de $A$ vem da expressão que o define, $\rho(r) = A/r$, cujas unidades ficam:

$$\frac{C}{m^3} = \frac{[A]}{m} \quad \rightarrow \quad [A] = \frac{C}{m^2}$$

**3ª Questão: (3,0)**

a) (**1,0**) Um fio de comprimento 2L está carregado uniformemente com a densidade linear de carga λ. Determine uma expressão para o potencial elétrico em um ponto arbitrário do eixo y, conforme mostra a Figura 1.

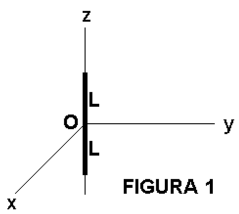


FIGURA 1

b) (**1,0**) Adapte a solução do item (a) para determinar o potencial elétrico devido a um fio quadrado de lado 2L, carregado uniformemente com a densidade linear de carga λ, em um ponto de observação arbitrário do eixo z, conforme mostra a Figura 2. <u>Sugestão</u>: *calcule a distância entre o ponto de observação e o ponto médio de um dos lados do quadrado*.

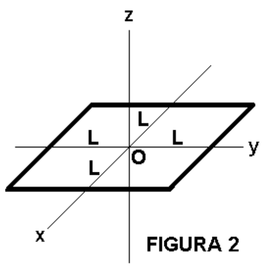


FIGURA 2

c) (**1,0**) Determine o vetor campo elétrico devido ao fio quadrado no mesmo ponto de observação.

**SOLUÇÃO**

(a) O potencial elétrico em um ponto arbitrário do eixo y é:

$$V(0{,}0,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}\int_{-L}^{L}\frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}Ln\left[\frac{\sqrt{L^2+y^2}+L}{\sqrt{L^2+y^2}-L}\right]$$

(b) Na equação (1), *y* representa a distância entre o ponto de observação e o ponto médio do fio. No caso do fio quadrado, a distância entre o ponto de observação e o ponto médio de um dos lados é $(L^2+z^2)^{1/2}$. Adicionalmente, as contribuições dos quatro lados para o potencial no ponto de observação são iguais. Logo,

$$V(0{,}0,z) = 4\times\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}Ln\left[\frac{\sqrt{L^2+(L^2+z^2)}+L}{\sqrt{L^2+(L^2+z^2)}-L}\right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_o}Ln\left[\frac{\sqrt{2L^2+z^2}+L}{\sqrt{2L^2+z^2}-L}\right]$$

(c) Pela simetria da configuração, $\vec{E}(0,0,z) = E_z(0,0,z)\hat{z}$, onde

$$E_z(0{,}0,z) = -\frac{\partial}{\partial z}V(0{,}0,z) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_o}\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\sqrt{2L^2+z^2}}}{\sqrt{2L^2+z^2}+L} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\sqrt{2L^2+z^2}}}{\sqrt{2L^2+z^2}-L}\right]$$

$$E_z(0{,}0,z) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_o}\frac{z}{\sqrt{2L^2+z^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2L^2+z^2}-L} - \frac{1}{\sqrt{2L^2+z^2}+L}\right] = \frac{2L\lambda}{\pi\epsilon_o}\frac{z}{\sqrt{2L^2+z^2}}\frac{1}{L^2+z^2}$$

(c.2) Os dois triângulos retângulos com vértices na origem mostram que $r^2 = s^2+z^2 = x^2+L^2+z^2$. Logo, a componente $E_z(0,0,z)$ do vetor campo elétrico pode ser calculada diretamente

$$E_z(0{,}0,z) = 4\times\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_{fio}\frac{cos\theta}{r^2}dq = \frac{\lambda z}{\pi\epsilon_o}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(x^2+L^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z(0{,}0,z) = \frac{\lambda z}{\pi\epsilon_o}\left[\frac{x}{(L^2+z^2)(x^2+L^2+z^2)^{1/2}}\right]_{-L}^{+L} = \frac{2L\lambda}{\pi\epsilon_o}\frac{z}{\sqrt{2L^2+z^2}}\frac{1}{L^2+z^2}$$