>

Monitoria MAT1162 - 28/03/2013

(Pontos críticos, vetor normal, plano tangente, aproximação linear)

1) Considere a função $f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right)$, onde $\mathrm{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \}$.

A) Desenhe o gráfico de f.

B) Calcule o normal unitário $n = n(x, y)$ ao gráfico de f tal que a terceira coordenada de n seja positiva.

Solução: Como $f_x(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ *e* $f_y(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, *segue que* $N = (-f_x, -f_y, 1) = \left(-\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}, 1\right)$ *é o normal (não-unitário) ao gráfico de* f. *Logo,* n

$$= \frac{N}{\|N\|} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, -\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}\right)$$ *é o unitário pedido.*

Como

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 + 1 &= \frac{x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + 1 \\ &= \frac{x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 + 1\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

temos que

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e então $n(x, y) = \left(-\dfrac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, -\dfrac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \dfrac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}\right)$

$$= \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+1}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \right)$$

C) Calcule $\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} n(x, y)$; dando uma interpretação geométrica do resultado.

Solução: Como $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ *e* $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ *(por quê?),*

$\sqrt{x^2+y^2+1} \to \infty$ *se* $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$,

e $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \to 1$ *se* $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ *(por quê?)*

teremos que

$n(x, y) \to (0, 0, 1)$ *se* $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.

Note: A curva geratriz da região espacial, $z = \ln(r)$, $r > 1$, *tem a propriedade de que* $z'(r) = \frac{1}{r} \to 0$ *se* $r \to \infty$. *Logo, a reta tangente ao gráfico de* $z = \ln(r)$ *tende à reta horizontal quando* $r \to \infty$, *ou seja, o normal unitário n desta reta tende ao vetor vertical!*

---

2) Considere a função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 1$.

A) Dado $(x_0, y_0, z_0) \in graf(f)$, encontre o vetor normal $N = (a, b, 1)$ ao gráfico de f, determinando a e b em função de x_0, y_0, z_0.

Solução: $N = \left(-3x_0^2, -3y_0^2, 1\right)$.

B) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0).

Solução: $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, *logo,*
$z = x_0^3 + y_0^3 - 1 + 3x_0^2(x - x_0) + 3y_0^2(y - y_0)$.

C) Encontre os pontos do gráfico de f cujos planos tangentes passam pela origem. Interprete geometricamente.

Solução: Substituindo $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *na equação do plano tangente obtida no item anterior, temos:*

$0 = x_0^3 + y_0^3 - 1 + 3\,x_0^2(-x_0) + 3\,y_0^2(-y_0)$

Logo, $x_0^3 + y_0^3 = -\frac{1}{2}$*, e então* $z_0 = x_0^3 + y_0^3 - 1 = -\frac{3}{2}$*. Ou seja, os pontos procurados são todos aqueles que pertencem à curva de interseção do cilindro vertical sobre* $x^3 + y^3 = -\frac{1}{2}$ *com o plano horizontal* $z = -\frac{3}{2}$.

---

3) Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$. Seja $f(x, y) = 2\,x^2 - 3\,y^2 + 3\,y + 4\,x + 3$.

A) Encontre um ou mais pontos do gráfico de f tais que o normal ao plano tangente é paralelo ao vetor (a, b, c).

B) Encontre os pontos do gráfico onde o vetor normal é vertical (ou seja, o vetor deve ser não-nulo e paralelo ao eixo z).

---

4) Considerando a função $f(x, y) = \ln\left((1 - x)e^{1-y} - xe^{y}\right)$ e o ponto $(x, y) = (0, 0.5)$, encontre um valor aproximado de

$\ln\left((0.97)e^{0.48} - (0.03)e^{0.52}\right)$.

---

5) Seja $f(x, y, z) = \dfrac{e^{x+y+z}}{(1 + e^x)(e^x + e^y)(e^y + e^z)(1 + e^z)}$.

A) Encontre seus pontos críticos.

Solução: (Complete os detalhes!)

Escreva $f(x, y, z)$ como produto de 5 funções e derive-a utilizando a Regra do Produto.

Os resultados são:

$$f_x = f - f\,\frac{e^x}{1 + e^x} - f\,\frac{e^x}{e^x + e^y}$$

Como $f > 0$, temos $f_x = 0 \Leftrightarrow y = 2\,x$

Por simetria, $f_z = 0 \Leftrightarrow y = 2\,z$.

$$f_y = f - f\,\frac{e^y}{e^x + e^y} - f\,\frac{e^y}{e^y + e^z}$$

Temos que $f_y = 0 \Leftrightarrow 2\,y = x + z$.

Logo, os pontos críticos (x, y, z) devem satisfazer o seguinte sistema de equações:

$y = 2x$
$y = 2z$
$2y = x + z$

Conclui-se que o único ponto crítico é $(0, 0, 0)$.

B) Encontre a aproximação linear de $f(x, y, z)$ em torno de $(0, 0, 0)$.

C) Encontre a aproximação linear de $f(x, y, z)$ em torno de $(1, 1, 1)$.

---

6) (P1 - 2012.1) Seja $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 - 3y^4$.

A) Encontre um vetor normal N ao gráfico de f num ponto $(a, b, f(a, b))$.

B) Encontre todos os pontos do gráfico de f tais que o plano tangente ao gráfico de f neste ponto é horizontal; ou seja, o plano é da forma $z = c$ (c constante).

C) Encontre todos os pontos críticos de f.