>

Monitoria MAT1162 - 14/03/2013

(Coordenadas Polares)

---

1) Calcule a área da região R definida por:

$r \leq 2 + \cos(\theta)$
$r \geq 1.$

Resp.: $\dfrac{7\pi}{2}$

---

2) Considere a região plana

$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 \leq y \leq 1, \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{2 - y^2} \right\}.$

A) Descreva a região R como união de 3 regiões da forma $\{ (r, \theta) | a \leq \theta \leq b,\ f(\theta) \leq r \leq g(\theta) \}$.

B) Calcule o centroide de R.

---

3) Sejam

$U_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} \leq 1 \right\},$

$U_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \dfrac{4(x^2 + y^2)}{3} \leq z^2 \right\}.$

Calcule o volume de $U = U_1 \cap U_2$.

Resp.: $\dfrac{4\pi}{3}$

---

4) Calcule o volume do sólido

$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$

Resp.: 11π.

---

5) Considere a seguinte região U do espaço:

$$U=\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

A) Esboce U.

B) Calcule o volume de U.

Solução: Em coordenadas polares, a calota superior da esfera centrada na origem de raio 2 se escreve como $z = \sqrt{4 - r^2}$. Já o cone se escreve como $z = r$. A curva de interseção entre a esfera e o cone é $\sqrt{4-r^2} = r$, ou seja,
$r = \sqrt{2}$ (logo, a projeção ortogonal é um círculo centrado na origem de raio $\sqrt{2}$). Já a interseção entre o plano $z = 1$ e o cone é $r = 1$ (e então a projeção ortogonal é um círculo centrado na origem de raio 1). Para calcular o volume de U, dividiremos o sólido em duas partes:

$$Vol(U) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left(\sqrt{4-r^2} - 1\right) r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-r^2} - r\right) r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\ \mathrm{d}r - \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\right) + \frac{\pi}{2}\left(\int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{4-r^2}\ \mathrm{d}r - \int_1^{\sqrt{2}} r^2\mathrm{d}r\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{4-r^2}\ \mathrm{d}r - \int_0^1 r\,\mathrm{d}r - \int_1^{\sqrt{2}} r^2\,\mathrm{d}r\right)$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

---

6) Calcule o volume do sólido compreendido entre o gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e a região (do plano xy)
$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$.

---

7) Seja R_1 a região do plano dada em coordenadas polares por $0 \leq r \leq \sin(2\theta), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Considere $R = R_1 \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \geq \frac{3}{4} \right\}$.

A) Desenhe a fronteira de R_1.

B) Desenhe a fronteira de R.

C) Usando coordenadas polares, calcule a área de R.

Solução:

$$C)\ A(R) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{sen(2\theta)} r\, dr\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{sen^2(2\theta)}{2} - \frac{3}{8} \right] d\theta$$

Utilizando que $sen^2(\theta) = \dfrac{(1 - cos(2\theta))}{2}$, temos:

$$A(R) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[-\frac{1}{8} - \frac{cos(4\theta)}{4} \right] d\theta = -\frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$$