Monitoria - 07 de Março

Relembrando as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas

Seja $a > 0$. Por definição $a^x := e^{x\ln(a)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, então

(i) $(a^x)^y = a^{xy}$, em particular $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$, em particular $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(iii) $(ab)^x = a^x b^x$, para $b > 0$

(iv) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \dfrac{1}{a^x}$

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$, então

(i) $\log_a(x) = y$, se, e somente se $x = a^y$

(ii) $\log_a\left(a^d\right) = d$, para $d \in \mathbb{R}$

(iii) $a^{\log_a(x)} = x$, para $x > 0$

(iv) $\log_a\left(x^d\right) = d\log_a(x)$, para $x > 0$ e $d \in \mathbb{R}$

(v) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

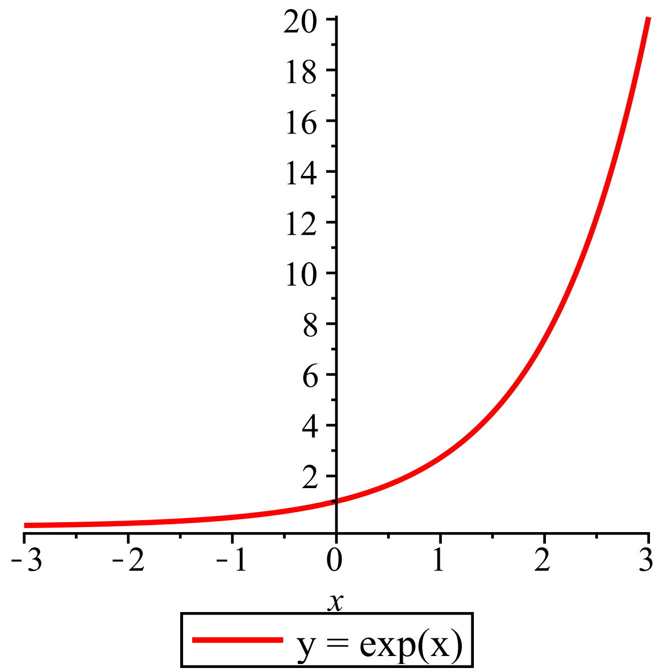
(vi) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

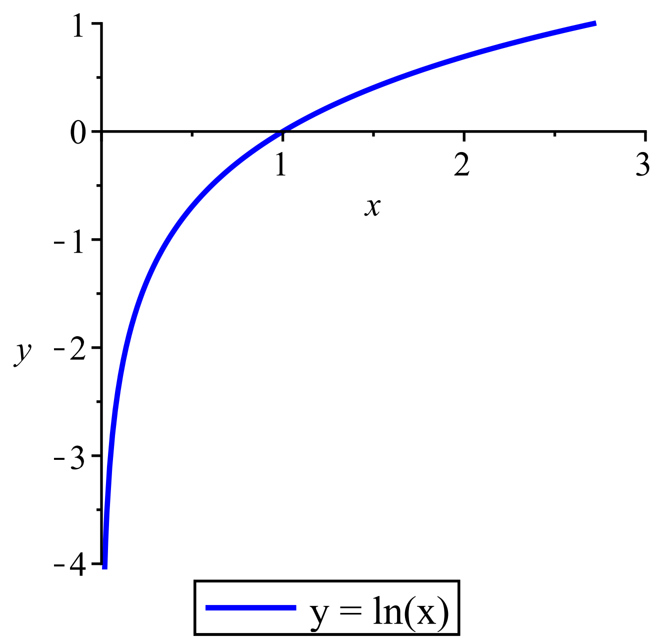
Exercícios:

1. Verifique que $\left(x^a y^b\right)^p = x^{ap} y^{bp}$.

2. Demonstre as propriedades acima.

Relembrando os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas





Exercícios:

1. Esboce os gráficos:

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = -e^{x}$

c) $f(x) = -\ln(x), x > 0$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = e^{x+1}$

f) $f(x) = \ln(x-2),\ x > 2$

g) $f(x) = 3 - e^{2x}$

h) $f(x) = 4 - \ln(x-2),\ x > 2$

2. Dada a função $f(x) = a^{x}$. Esboce o gráfico de f para $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Dada a função $f(x) = a^{x}$. Esboce o gráfico de f para $0 < a < 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

4. Considerando $a > 0$, calcule as derivadas das funções $f(x) = a^{x}$ e $g(x) = a^{\frac{1}{x}}$, para $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja a função $f(x) = a^{x}$, com $x > 1$ e $a > 0$. Verifique a concavidade do gráfico de f (para cima ou para baixo) e esboce-o.

6. Seja a função $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$, com $x > 1$ e $a > 0$. Verifique a concavidade do gráfico de f (para cima ou para baixo) e esboce-o.

7. Esboce o gráfico de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $0 < x < 1$.

8. Esboce o gráfico de $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$, $0 < y < 1,\ x \in \mathbb{R}$.