Cálculo a Várias Variáveis I - MAT 1162
2014.1

Cronograma para P2: aulas teóricas (segundas e quartas)

Aula 10 – 24 de março (segunda)
Aula 11 – 26 de março (quarta)

Referências:

- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seções 14.3 e 14.4

Ementa:

1. Derivadas Parciais e Pontos Críticos

- As funções tratadas no curso possuem a propriedade de que suas derivadas parciais mistas de segunda ordem são iguais.

- Fazer vários cálculos difíceis de primeira e segundas derivadas parciais, lembrando as regras de diferenciação de Cálculo I.

- Definir um **ponto crítico** no interior do domínio de definição (de uma função de duas ou de três variáveis reais) como sendo os pontos nos quais as primeiras derivadas parciais são (ambas) nulas.

- Notações: $w = F(x, y, z)$. As primeiras derivadas serão denotadas por F_x, F_y, F_z. As segundas derivadas serão denotadas por F_{xx}, F_{yy}, F_{zz}, F_{xy}, F_{xz}, F_{yz}.

- As notações clássicas usando o símbolo ∂ também devem ser introduzidas.

Exemplos típicos:

1. Cálculo das derivadas parciais das seguintes funções:

a) $F(x,y) = \ln\left(xy^3\right)$, $x > 0$, $y > 0$.

b) $F(x,\mathrm{y}) = \dfrac{\exp\left(x^2+y^2\right)}{1+x^2y^2}$

2. Seja $F(x,y) = (x-3)(y-3)\left(x+y-3\right)$. Encontre os pontos críticos de F nas seguintes regiões:

a) Em todo o plano $\mathbb{R}^2$.
Resp.: (0, 3), (3, 3), (3,0), (2, 2).

b) Na região aberta $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>3, x<3, y<3\}$
Resp.: (2, 2).

3. Seja $f(x,y)=6xy^2-2x^3-3y^4$. Encontre todos os pontos do gráfico de $f(x,y)$ onde o plano tangente ao gráfico é horizontal (ou seja, o normal nestes pontos é vertical), relacionando com os pontos críticos de $f(x,y)$ e os pontos onde o gradiente de f se anula.

Resp.: (0,0), (1,1), (1, -1).

4. Encontre os pontos críticos da função $F(x,y)=\dfrac{3y^2}{4}+\dfrac{y^3}{24}-\dfrac{y^4}{32}-x^2$. Tente esboçar o gráfico de F, estudando *os cortes* com os planos $x=0$ e $y=c$ (constante).

Resp.: (0, -3), (0,0), (0,4).

5. Seja $F(x,y,z)=\dfrac{e^{x+y+z}}{(1+e^x)(e^x+e^y)(e^y+e^z)(1+e^z)}$. Encontre seus pontos críticos.

Resp.: O único ponto crítico é (0,0,0).

6. Encontre os pontos críticos das seguintes funções:

a) $F(x,y,z)=\dfrac{xye^z}{\ln(2x^2+3y^2+z^2+3)}$

b) $F(x,y,z)=z\arctan\left(\dfrac{y}{x^2+1}\right)$

c) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$

d) $F(x,y)=y^3+3x^2y-3x^2-3y^2+2$

e) $F(x,y,z)=e^{xy}\ln(1+x^2z^2)$

7. Deduza que $u(x,y)=sen(x)sen(y)$ satisfaz a equação

$$\Delta u+2u=0$$

onde $\Delta u := u_{xx}+u_{yy}$.

8. Deduza que a função $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$ satisfaz a equação

$$x^2 f_{xx}+2xy\ f_{xy}+y^2 f_{yy}=2f\ .$$

9. Encontre todos os pontos críticos da função $f(x,y)=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$. Determine todos os pontos (x,y) tais que o normal N ao gráfico de f seja paralelo ao vetor (0, 0, -3).

2. Plano Tangente a um Gráfico e Gradiente

- Lembrar a equação cartesiana de um plano no espaço.

- Se o domínio é R, o gráfico de uma função $z = f(x,y)$ (denotado por $graf(f)$), está definido por
$$graf(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in R\right\}.$$

- Falar intuitivamente do **plano tangente a um gráfico** de uma função suave de duas variáveis $z = f(x,y)$.

- Afirmar (sem deduzir) que em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ do gráfico de f, um **normal** ao plano tangente é
$$N(x_0,y_0) = \left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right).$$

- Qualquer múltiplo de R por um escalar não nulo também é um normal. Deduzir daí a equação do plano tangente ao gráfico de f:
$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

- Observação: Os pontos do gráfico de $f(x,y)$ onde o plano tangente ao gráfico é horizontal (ou seja, o normal nestes pontos é vertical) correspondem aos pontos críticos de f.

Exercício: Nos exemplos 1(a), 1(b) e 2 (acima) encontrar a equação geral do plano tangente correspondente a um ponto fixado (x_0, y_0) do domínio de $f(x,y)$.

- **Aproximação linear** de um gráfico de uma função $f(x,y)$ de duas variáveis. Dizer que a aproximação linear L(x, y) de uma função num ponto (x_0, y_0) é o plano tangente ao gráfico de f neste ponto. Falar intuitivamente da Fórmula de Taylor com resto (de primeira ordem). Idem para funções de três variáveis $f(x,y,z)$.

- Observar que as funções que possuem esta aproximação linear são chamadas de *diferenciáveis*. Tais funções possuem derivadas parciais de primeira ordem também.

- A definição de **gradiente**: Enfatizar que um ponto é crítico se o gradiente é nulo, relacionando o gradiente com o normal a um gráfico. Dar a notação clássica do gradiente. Comentar também o caso de uma função $f(x,y,z)$ de três variáveis.

Exercício: Nos exemplos 1(a), 1(b) e 2 (acima) encontrar a aproximação linear para as funções dadas no ponto (1,1).

Exercício: Nos exemplos 6(a) – 6(e) (acima) encontrar a aproximação linear para as funções dadas nos pontos (0, 0, 0) e (1, 1, 1).

Exercício: Considere a função $f(x,y)=e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2\right)$. Determine todos os pontos (x,y) tais que o normal N ao gráfico de f seja paralelo ao vetor (0, 0, -3). Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f em (1,1).

Exercício: Considere $f(x,y,z)=\dfrac{xe^y}{z}$, $z\neq 0$. Encontre a aproximação linear $L(x,y,z)$ de $f(x,y,z)$ no ponto (2, 0, 1). Utilize $L(x,y,z)$ para encontrar uma aproximação para $f\left(1.9970, 0.0020, 1.0012\right)$. Além disso, determine os pontos (x,y,z), $z\neq 0$, tais que $\nabla f(x,y,z)=(-1,1,1)$.

Aula 12 – 31 de março (segunda)
Aula 13 – 02 de abril (quarta)

Referências:

- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seções 7.1, 7.2 e 7.3
- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seções 10.1 e 13.1

Ementa:

1. Curvas Planas Parametrizadas

- Curvas planas parametrizadas como aplicações diferenciáveis $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de um intervalo I da reta no plano, $\alpha(t)=\left(x(t), y(t)\right)$.

- O **traço da curva** é a imagem da parametrização (curva geométrica): $traço(\alpha) := \mathrm{Im}(\alpha)$.

- **Vetor tangente ou vetor velocidade :**
$$v(t)=\alpha'(t)=\left(x'(t), y'(t)\right)=\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right).$$

- Se o vetor velocidade é não nulo então a **reta tangente à curva** em um ponto dado da curva pode ser naturalmente dada na forma paramétrica, sendo o **vetor velocidade** o **vetor diretor da reta**. A **reta normal** tem como vetor diretor o vetor diretor da reta tangente rotacionado por um ângulo de 90 graus.

- Quando o vetor tangente ou vetor velocidade é **não nulo**, fica definida no intervalo uma **orientação** ou **sentido do movimento**, determinado pelo vetor velocidade. Neste caso: nos pontos em que $dx/dt=0$ (e o vetor velocidade neste ponto é não nulo) temos uma **reta tangente vertical**. Nos pontos onde $dy/dt=0$ (e o vetor velocidade neste ponto é não nulo) temos uma **reta tangente horizontal**.

- **Simetrias da curva**: O traço é **simétrico** com respeito ao eixo x se $(a,b)\in traço \Rightarrow (a,-b)\in traço$. O traço é **simétrico** com respeito ao eixo y se $(a,b)\in traço \Rightarrow (-a,b)\in traço$.

Exemplos:

1. A parametrização natural de um gráfico de uma função de uma variável real.

2. A não unicidade de uma parametrização: O exemplo do semicírculo (curva geométrica) parametrizado de várias maneiras distintas: parametrizado pelo ângulo (com velocidades diferentes); assim como parametrizado como um gráfico.

3. O exemplo da elipse e outros exemplos clássicos.

Obs.: Identificar o sentido do movimento ou orientação em cada um dos casos acima, assim como encontrar as retas tangentes verticais e horizontais, caso existam.

4. Seja $\alpha(t)=\left(t^3-4t,t^2-4\right)$, $t\in\left(-\infty,\infty\right)$.

a) Determine o vetor velocidade em três instantes de tempo distintos.
Resp.: De forma geral, $v(t)=\alpha'(t)=\left(3t^2-4,2t\right)$.

b) Determine os pontos em que as retas tangentes são verticais ou horizontais, caso existam.
Resp.: Pontos onde a reta tangente é vertical: $\alpha\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{16}{3\sqrt{3}},-\frac{8}{3}\right)$, $\alpha\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{16}{3\sqrt{3}},-\frac{8}{3}\right)$.
Pontos onde a reta tangente é horizontal: $\alpha\left(0\right)=\left(0,-4\right)$.

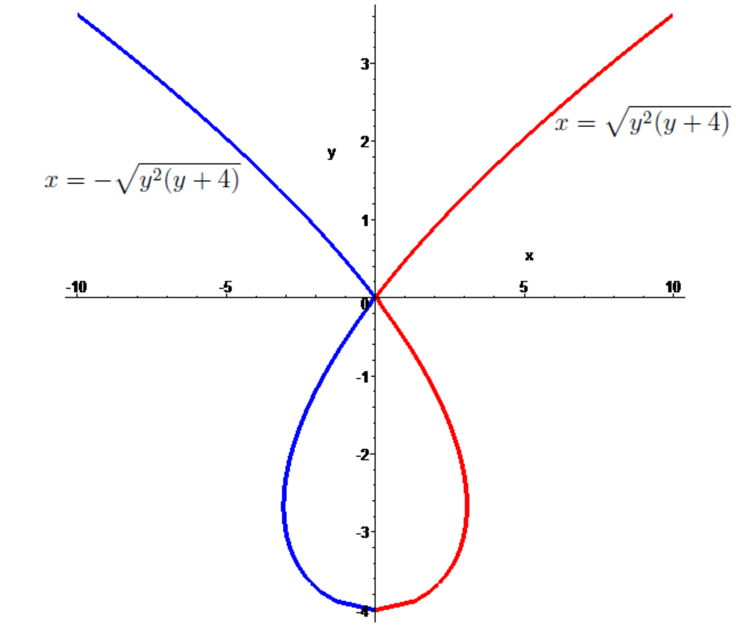
c) Determine se o traço da curva plana é simétrico com respeito ao eixo x ou ao eixo y.
Resp.: É simétrico com relação ao eixo y, pois
$\alpha(t)=\left(t^3-4t,t^2-4\right)$ e $\alpha(-t)=\left(-\left(t^3-4t\right),t^2-4\right)$.

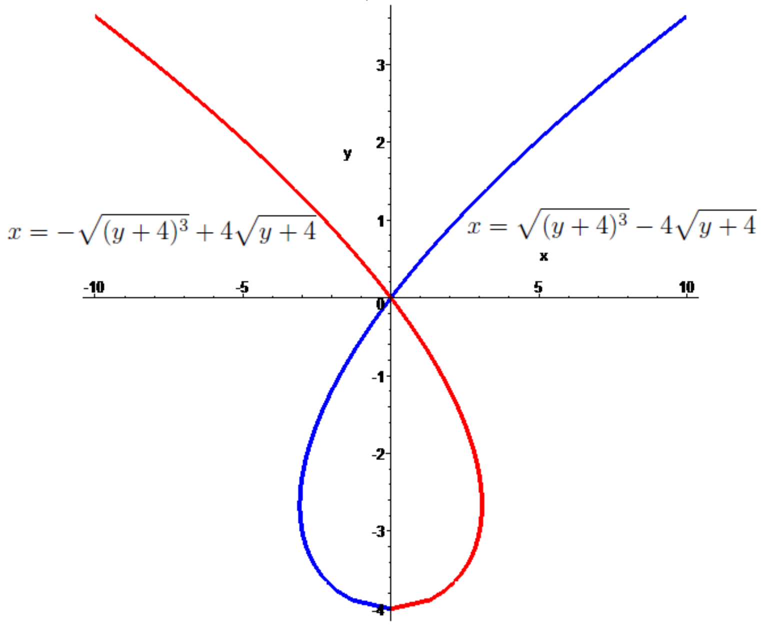
d) Deduza que o traço da curva é união de dois gráficos horizontais da forma $x=h(y)$, explicitando as fórmulas e os domínios das funções.
Resp.: Há duas respostas possíveis: $x=\pm\sqrt{y^2(y+4)}$ ou $x=\pm\sqrt{(y+4)^3}\mp4\sqrt{y+4}$.

e) Deduza que o traço da curva é a união de três gráficos verticais da forma $y=g(x)$, explicitando os domínios das funções.

f) Esboce o traço da curva.

Resp.: Utilizando a resposta do item (d), podemos esboçá-lo das seguintes formas:





2. Curvas Espaciais Parametrizadas

- As curvas **espaciais** parametrizadas C são aplicações contínuas de um intervalo da reta I no plano: $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.

- Traço (imagem) de uma curva parametrizada.

- Vetor tangente ou vetor velocidade:
$$v(t)=\alpha'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)=\left(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt}\right).$$
Se o vetor velocidade é não nulo, então a reta tangente num ponto dado da curva pode ser naturalmente dada na forma paramétrica, sendo o vetor velocidade o vetor diretor da reta.

- Obter curvas parametrizadas cujos traços estão contidos em curvas clássicas: cilindros, gráficos de funções clássicas, esferas, etc.

- **Obter parametrizações de curvas obtidas como interseção de duas superfícies:**

(i) Interseção de uma superfície (gráfico, cilindro, etc) com um plano.
(ii) Interseções de cilindros com esferas, outras quádricas e outras superfícies.
(iii) Exemplo de interseção de cones com esferas, outras quádricas e outras superfícies.

- **Plano ortogonal a uma curva espacial**: o vetor velocidade não nulo da curva espacial em um ponto (x_0, y_0, z_0) é normal ao plano ortogonal à curva neste ponto.

Exemplos típicos:

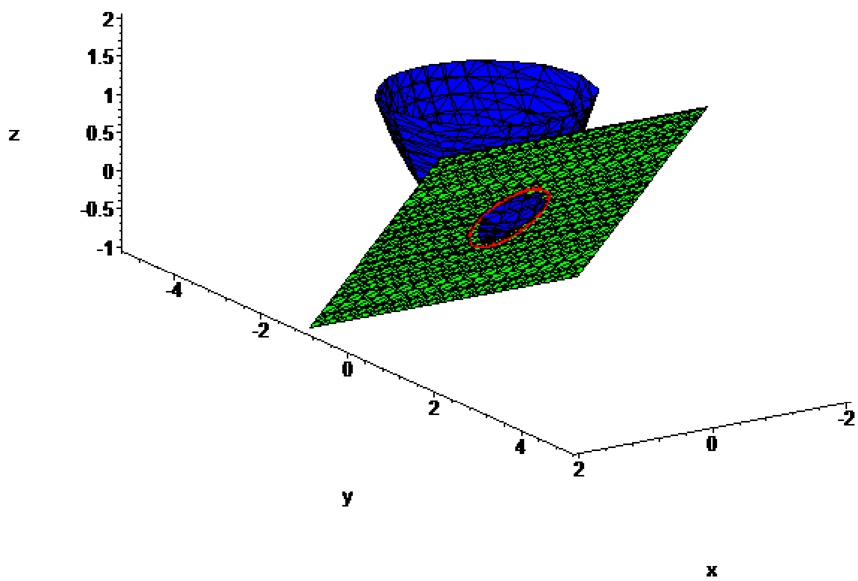
1. a) Parametrize a curva espacial de interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = y$.
   b) Encontre a equação cartesiana do plano ortogonal à curva espacial do item (a) no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Solução: a) Igualando as duas expressões, temos que a projeção no plano xy da curva C de interseção satisfaz a equação $x^2 + y^2 - y = 0$, ou seja, $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (um círculo de centro $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{1}{2}$).

Parametrização de C:

$$\alpha(\theta) = \left(\frac{1}{2}\cos(\theta), \frac{1}{2}\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}\right),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

(lembrando que $z = y$).



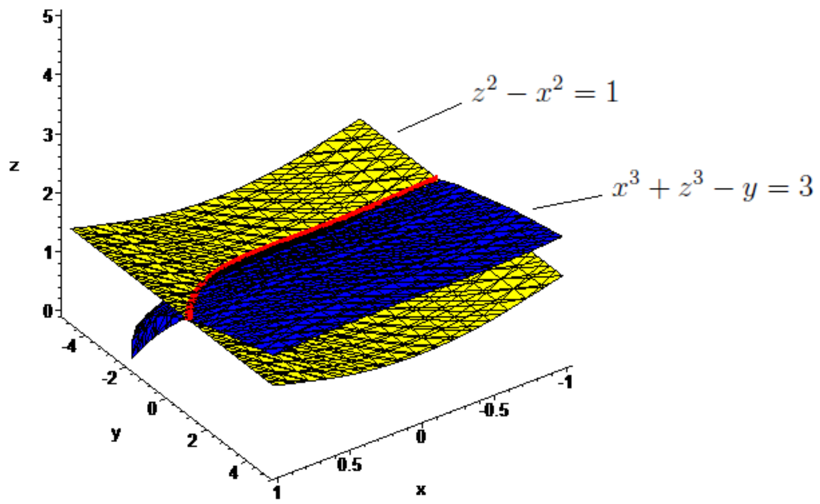
2. Considere as superfícies

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + z^3 - y = 3\right\} \text{ e } S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 = 1, z > 0, -1 \le x \le 1\right\}.$$

a) Exiba uma parametrização da curva espacial $C := S_1 \cap S_2$.

b) Encontre a equação cartesiana do plano ortogonal à curva C no ponto (0 , -2, 1).

Resp.: a) $\alpha(t) = \left(t, t^3 + \left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 3, \sqrt{t^2+1} \right), \quad t \in [-1,1]$.



3. Parametrize a seguinte curva espacial:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \right\} \cap \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1 \right\}.$$

4. Parametrize a curva espacial obtida como interseção das superfícies S e W, onde

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^7 e^{xz} + xz + 2z^2 + 3 = 0 \right\},\ W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}.$$

Aula 14 – 07 de abril (segunda)

Referências:

- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seções 14.1, 14.5, 14.6

Ementa:

1. Regra da Cadeia, Curvas e Superfícies de Nível

- **Regra da cadeia** para funções de 2 variáveis reais da forma $f\left(x(t), y(t)\right)$, onde $f(x,y)$ é diferenciável e $t \to \left(x(t), y(t)\right)$ é uma curva plana diferenciável.

- **Gradiente e curva de nível**: Normal a uma curva de nível. Equação da reta tangente e equação paramétrica da reta normal a uma curva de nível.

Exemplos típicos:

1. Considere $f(x,y)=4x^2+9y^2$. Seja C a curva de nível 1 da função f.

   a) Verifique que $\nabla f(x,y)$ é perpendicular à curva C.
   b) Encontre as equações cartesiana e paramétrica da reta tangente à curva C em um ponto (x_0,y_0) da curva.
   c) Encontre as equações cartesiana e paramétrica da reta normal à curva C em um ponto (x_0,y_0) da curva.

   Solução: a) Uma parametrização para esta curva é dada por:

$$\alpha(t)=\left(\frac{\cos(t)}{2},\frac{sen(t)}{3}\right),\quad t\in[0,2\pi].$$

   Logo, seu vetor velocidade é o seguinte:

$$\alpha'(t)=\left(-\frac{\text{sen}(t)}{2},\frac{\cos(t)}{3}\right).$$

   Além disso,

$$\nabla f\left(\alpha(t)\right)=\left(4\cos(t),\frac{18}{3}sen(t)\right),$$

   Segue imediatamente que $\nabla f\left(\alpha(t)\right)\cdot\alpha'(t)=0$.

2. Repita o exercício anterior para a função $f(x,y)=4x^2-9y^2$.

- **Derivadas direcionais** e a **direção de maior crescimento** de uma função real de duas variáveis.

- **Regra da cadeia** para funções de 3 variáveis reais da forma $f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, onde $f(x,y,z)$ é diferenciável e $t\to\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ é uma curva espacial diferenciável.

- **Aplicação:** Seja $c(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, $t\in[a,b]$ uma curva espacial, diferenciável. Seja $f(x,y,z)$ diferenciável. Defina $g(t)=f\left(c(t)\right)$.

  O problema de calcular os máximos e mínimos globais da restrição de $f(x,y,z)$ à curva c se reduz a encontrar os máximos e mínimos globais da função $g(t)$ no intervalo fechado $[a,\text{b}]$; o que pode ser feito aplicando os métodos do Cálculo I.

  Para tal, é preciso calcular os pontos críticos de $g(t)$, ou seja, é preciso resolver

$$\nabla f\left(x(t),y(t),z(t)\right).\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)=0$$

  (produto escalar é zero), $t\in(a,b)$.

Exemplo típico:

1. Considere o gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. A interseção dessas duas superfícies define uma curva espacial. Determine quais pontos dessa curva estão mais próximos e mais afastados da origem.

   Solução: Olhar planilha de Maple 07c (aula do dia ?? de abril).

- **Gradiente e superfície de nível**. Normal a uma superfície de nível. Equações do plano tangente e equação paramétrica da reta normal a uma superfície de nível.

Exemplos típicos:

1. Considere $f(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$. Seja S a superfície de nível 14 da função f.

   a) Verifique que $\nabla f(x,y,z)$ é normal à superfície S (ou seja, é normal ao plano tangente).
   b) Encontre a equação cartesiana do plano tangente à superfície S no ponto (1,1,1).
   c) Encontre a equação paramétrica da reta normal à superfície S que passa pelo ponto (1,1,1).

   Solução: a) Seja $\alpha(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ a parametrização de uma curva qualquer contida em S. A equação da superfície deve então ser satisfeita por essas coordenadas:

$$4\left(x(t)\right)^2 + 9\left(y(t)\right)^2 + \left(z(t)\right)^2 = 14.$$

   Derivando os dois lados desta equação, temos:

$$8x(t)x'(t) + 18y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0$$

   Logo,

$$\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) \cdot \left(8x(t), 18y(t), 2z(t)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha'(t) \cdot \nabla f\left(\alpha(t)\right) = 0.$$

2. Considere as funções $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ e $g(x,y,z) = z - y$. Seja $C = S_1 \cap S_2$ uma curva espacial, onde S_1 e S_2 são as superfícies de nível 0 de f e g, respectivamente.

   a) Verifique que o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertence à curva C.
   b) Verifique que $\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \nabla g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (produto vetorial entre os gradientes) é tangente à curva C no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Justifique sua resposta.

Aula 15 – 09 de abril (quarta)
Aula 16 – 14 de abril (segunda)

Referências:

- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seção 14.5

Ementa:

1. Regra da cadeia para funções de 2 ou 3 variáveis reais

- Regra da cadeia para funções de 2 ou 3 variáveis reais nas seguintes formas:

(i) $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, onde $f(x,y)$ é diferenciável e as funções reais $(u,v) \to x(u,v)$ e $(u,v) \to y(u,v)$ são diferenciáveis.

(ii) $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$, onde $f(x,y,z)$ é uma função real diferenciável e as funções $(u,v) \to x(u,v)$, $(u,v) \to y(u,v)$, $(u,v) \to z(u,v)$ são diferenciáveis.

(iii) $g(x,y,z) = f\left(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\right)$, onde $f(u,v,w)$, $(x,y,z) \to u(x,y,z)$, $(x,y,z) \to v(x,y,z)$, $(x,y,z) \to w(x,y,z)$ são funções reais diferenciáveis.

Exemplos típicos:

1. Seja $F(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ para $u > 0$, onde $x(u,v) = u$ e $y(u,v) = uv$.

a) Calcule F_{uu} (segunda derivada com respeito a u) em termos de x, y e das derivadas parciais de f.

Resp.: $F_{uu} = f_{xx} + \dfrac{2y}{x} f_{xy} + \dfrac{y^2}{x^2} f_{yy}$.

b) Assuma que $f(1,1) = 1$, $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 1$. Escreva a equação paramétrica da reta normal à curva de nível $F(u,v) = 1$ no ponto (1,1).

Resp.: $\alpha(t) = (1+2t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Seja $f(x,y)$ diferenciável. Seja $g(r,\theta) = f\left(r \ \cos\theta, r \ sen\theta\right)$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$.

a) Calcule $r^2\left(g_r\right)^2 + \left(g_\theta\right)^2$ em termos de r, f_x e f_y.

Resp.: $r^2\left(g_r\right)^2 + \left(g_\theta\right)^2 = r^2 f_x^2 + r^2 f_y^2$.

b) Calcule g_{rr} (a segunda derivada de g com respeito a r).

Resp.: $g_{rr} = f_{xx}\cos^2(\theta) + 2 f_{xy}\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + f_{yy} sen^2(\theta)$.

3. O laplaciano Δ de uma função $u(x,y)$ com segundas derivadas parciais contínuas é definido por

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Uma função definida em uma região R é chamada *harmônica* se $\Delta u(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in R$.

Fazendo uma mudança de variáveis polares ($x = r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$), temos que:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} .$$

Deduza que as funções abaixo são harmônicas:

a) $u(x, y) = a + b \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, a , $b \in \mathbb{R}$.

b) $u(r,\theta) = r^{\alpha} \cos(\alpha\theta)$.

Aula 17 – 16 de abril (quarta)

Atendimento em sala de aula

---

25 de abril (sexta)

T2 – Horário de aula

Valor: 2,0 pontos

---

26 de abril (sábado)

P2 – 11:30 às 13:20

Valor: 8,0 pontos
