PUC-RIO – CB-CTC

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 12.09.12 – quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,0		
3ª Questão	3,5		
Total	10		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$$

Superfície esfera= $4\pi\, R^2$

Volume esfera $= \frac{4}{3}\pi\, R^3$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

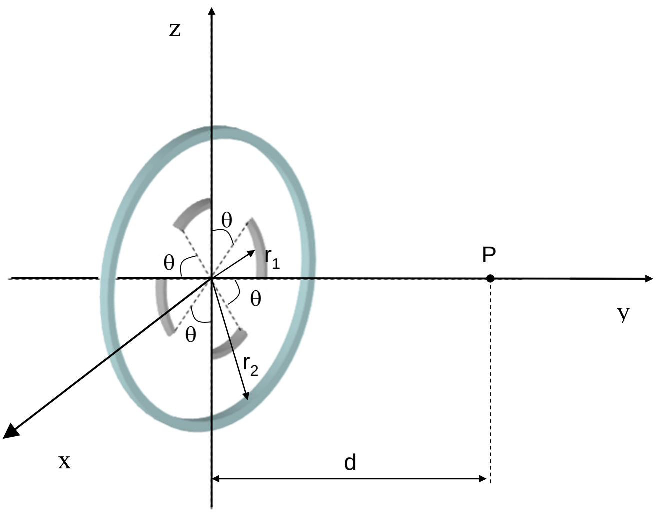
$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 12/09/12 – quarta-feira

1ª Questão: (3.5)

Uma distribuição continua de cargas é constituída por um anel de raio $r_2 = \sqrt{10}\,a$, com densidade linear de carga uniforme $\lambda_2 > 0$, e um anel fracionado concêntrico de raio $r_1 = a$ e densidade linear de carga uniforme $\lambda_1 > 0$, ambos no plano XZ e com o mesmo eixo Y.

O anel fracionado é constituído por quatro arcos de circunferências idênticos, e cada arco é separado do seguinte por um ângulo θ, conforme a figura ao lado.



(a) (**1,5**) Calcule o potencial elétrico gerado pela distribuição de carga no ponto P que se encontra sobre o eixo y a uma distancia $d = \sqrt{15}\,a$ da origem.

(b) (**0.5**) Se o anel fracionado for girado de um ângulo β arbitrário entorno do seu eixo, o resultado mudaria? Justifique as suas afirmações.

(c) (**1.0**) Qual deve ser o valor da razão $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ para o potencial no ponto P ser igual a zero?

(d) (**0.5**) Trace o gráfico de $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ em função do ângulo θ. Descreva o andamento encontrado justificando as suas afirmações.

Solução

a) O POTENCIAL GERADO PELO ANEL COM RAIO r_2 NO PONTO P É'

$$V_2(P) = K\int_0^{2\pi} \frac{\lambda_2 r_2}{\sqrt{d^2 + r_2^2}}\, d\varphi = \frac{K\lambda_2\sqrt{10}\,a}{5a}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{10}}{5}\,K\lambda_2$$

O POTENCIAL GERADO PELO ANEL QUEBRADO NO PONTO P É'

$$V_1(P) = 4\left(K\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \frac{\lambda_1 r_1}{\sqrt{d^2 + r_1^2}}\, d\varphi\right) = \frac{4K\lambda_1 a}{4a}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} d\varphi = K\lambda_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$V_{tot}(P) = V_1(P) + V_2(P) = K\left[\lambda_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \lambda_2\,\frac{2\pi\sqrt{10}}{5}\right]$$

b) NÃO, O RESULTADO NÃO MUDARIA PORQUE' O PONTO P SE ENCONTRA SOBRE O EIXO QUE PASSA PELO CENTRO DE SIMETRIA DA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA, GIRANDO O ANEL QUEBRADO DE QUALQUER A ÂNGULO Ψ, A DISTANCIA ENTRE OS ELEMENTOS DE CARGA SOBRE O ANEL QUEBRADO E O PONTO P NÃO MUDA.

c) e d) SOLUÇÃO RAPIDA: NÃO EXISTE UM VALOR DE $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ TAL QUE O POTENCIAL NO PONTO P E' IGUAL A 0V.
ISSO PORQUE' λ_1 E λ_2 SÃO AMBOS MAIORES DE 0 C/m

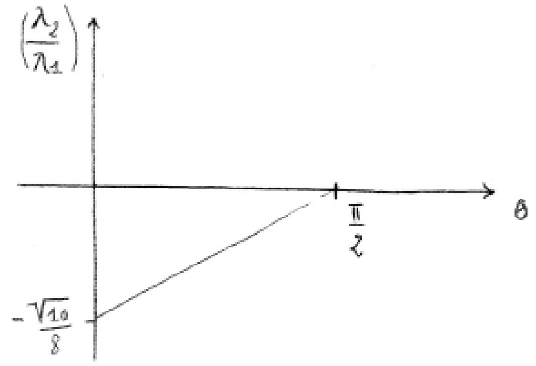
SOLUÇÃO LONGA

c) $V_1(P) + V_2(P) = 0 \longrightarrow \frac{2\pi\sqrt{10}}{5}\lambda_2 = \lambda_1\theta - \frac{\pi}{2}\lambda_1 = \lambda_1\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{\sqrt{10}}{8} + \frac{\sqrt{10}}{4}\theta$$

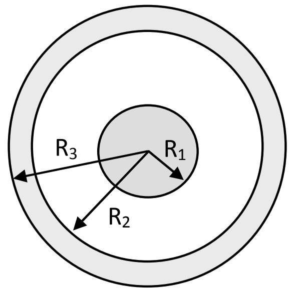
d)

GRAFICO:



O VALOR DE $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ E' SEMPRE NEGATIVO PARA QUE O POTENCIAL TOTAL NO PONTO P SEJA IGUAL A 0V. ENTÃO, NO NOSSO CASO ESPECIAL, SENDO λ_1 e λ_2 MAIORES DE 0 C/m, NÃO TEM SOLUÇÃO.

2ª Questão: (3.0)

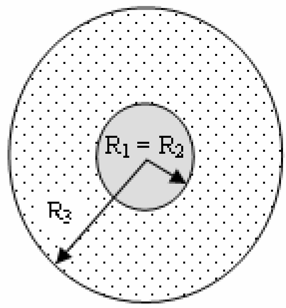


Uma esfera metálica maciça de raio R_1 = 1m é concentricamente circundada por uma casca esférica metálica com raios interno R_2 = 3m e externo R_3 = 4m, como mostrado na figura ao lado.

O fluxo elétrico ϕ através de uma superfície esférica gaussiana de raio r =6m vale $\phi = 6 \times 10^2$ N m^2/C. Sabendo que a esfera maciça possui uma carga Q_1 = 4 nC e considerando que $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-11}$ C^2/N m^2 e $k = 9 \times 10^9$ N m^2/ C^2:

(a) (**1.0**) Calcule, utilizando a Lei de Gauss, a distribuição das cargas nas superfícies externa e interna da casca esférica. Qual é o valor da carga líquida da casca? **Justifique as afirmações e os cálculos.**

(b) (**1.0**) Calcule o valor do módulo do campo elétrico na superfície da esfera maciça e na superfície externa da casca.

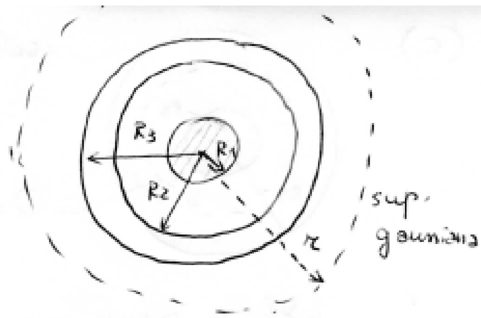


Considere agora que a casca esférica metálica é substituída por uma casca esférica isolante com R_2=R_1=1m e R_3= 4m (desenho ao lado). A casca isolante é carregada uniformemente com uma carga Q igual ao valor da carga líquida da casca metálica anterior.

(c) (**1.0**) Calcule o valor do fluxo elétrico ϕ através de uma superfície gaussiana esférica de raio r = $R_3/2$.

Solução

2ª Questão – gabarito.



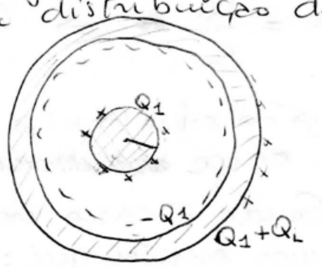
(a) Sabendo que :

$$\phi_{(r=6m)} = 6 \cdot 10^2 \frac{N\,m^2}{C}$$

Por Gauss : $\phi = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow Q_i = \phi \cdot \varepsilon_0 = 6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-11} = 6 \cdot 10^{-9} C = 6\ nC$$

Esta é a carga interna à sup. gaussiana tracejada acima.
Sabendo que a esfera maciça (interna) possui uma carga $Q_1 = 4\,mC$, a distribuição das cargas nas superfícies condutoras será:



$$\Rightarrow Q_i = Q_1 + Q_L$$
$$Q_L = Q_i - Q_1$$
$$Q_L = 6\,mC - 4\,mC$$
$$Q_L = 2\,mC$$

(b) O módulo do campo elétrico na superfície da esfera maciça (interna) vale:

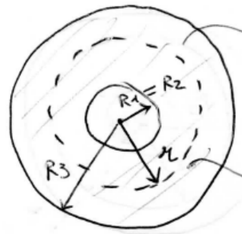
$$E_1 = k\frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \qquad k = 9\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \quad \varepsilon_0 = 1\cdot10^{-11}\,\frac{C^2}{Nm^2}$$
$$Q_1 = 4\,mC \quad R_1 = 1\,m$$

$$E_1 = \frac{9\cdot\cancel{10^9}\,4\cdot\cancel{10^{-9}}}{1} = 36\ N/C$$

O módulo do campo elétrico na superfície externa da casca metálica (externa) vale:

$$E_2 = k\frac{Q_i}{R_3^2} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{9\cdot\cancel{10^9}\cdot\,6\cdot\cancel{10^{-9}}}{16} = \frac{27}{8}\ N/C$$

(c)



isolante $\quad R_1 = R_2 = 1\,m$
$R_3 = 4\,m$

$Q = Q_L = 2\,mC$ ↳ encontrada no item (a).

A superfície gaussiana (tracejada) tem um raio $r = R_3/2 = 2\,m$, portanto pega somente uma parte da casca isolante.
O fluxo através desta superfície será dado por:

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_i = Q_1 + Q_x$$

Onde Q_1 é a carga da esfera maciça (interna) e Q_x é a quantidade de carga ~~contida~~ da casca isolante entre r e R_1. Sendo a casca isolante carregada uniformemente podemos escrever que:

$$\frac{Q}{4\pi(R_3^2-R_1^2)} = \frac{Q_x}{\cancel{4}\pi(r^2-R_1^2)} \Rightarrow Q_x = Q\,\frac{r^2-R_1^2}{R_3^2-R_1^2}$$

$$Q_x = 2\cdot\frac{4-1}{16-1} = 2\,\frac{3}{15} = \frac{2}{5}\ mC$$

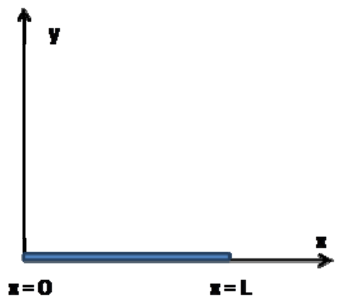
Portanto:

$$\phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1+Q_x}{\varepsilon_0} = \frac{4+\frac{2}{5}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = \frac{22}{5}\,\cancel{10^{-9}}\cdot\cancel{10^{11}} = \frac{22}{5}.10^{2}\ \frac{Nm^2}{C}$$

3ª Questão: (3.5)

Uma barra isolante, de espessura desprezível e comprimento L = 40 cm, repousa sobre o eixo x desde x = 0 até x = L. Ela recebe uma carga total Q_{TOTAL} que se distribui de modo <u>não uniforme</u> de acordo com a densidade linear de carga dada pela função $\lambda(x) = A\,x$, onde $A = 2\cdot 10^{-4}$ é uma constante com dimensões apropriadas. O sistema de coordenadas está indicado na figura.



(a) (**1,0**) Calcule o valor da carga total na barra, Q_{TOTAL}, e a unidade SI (Sistema Internacional) da constante *A*.

(b) (**1.5**) Calcule o valor E_y (componente *y* apenas) do vetor campo elétrico $\vec{E}$ no ponto de coordenadas (x, y, z) = (0, 30cm, 0).

(c) (**1.0**) O campo elétrico produzido por toda a barra no ponto *P*, de coordenadas (1.0m, 0, 0), vale $\vec{E} = 2{,}8\cdot 10^5\,\frac{N}{C}(\hat{x})$. Em que ponto do espaço se deveria colocar a carga pontual Q = - 0,7 μC para que o campo total resultante fosse nulo em *P*?

Solução

Carga total:

$$Q_{TOTAL} = \int dq = \int \lambda(x)dx$$

$$Q_{TOTAL} = \int_0^L Axdx = A\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = A\cdot\frac{L^2}{2} = 2\cdot 10^{-4}\cdot\frac{(0{,}40)^2}{2} \rightarrow \boxed{Q_{TOTAL} = 16\ \mu C}$$

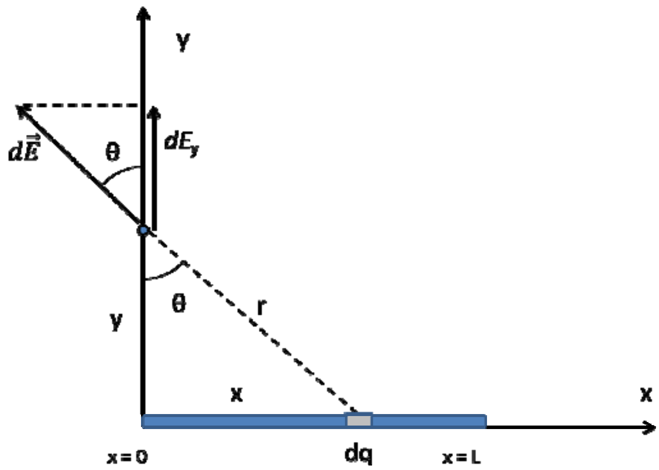
Constante A:

$$\lambda(x) = A \cdot x$$

Unidades SI:

$$\frac{C}{m} = [A] \cdot m \quad \rightarrow \quad \boxed{[A] = \frac{C}{m^2}}$$

(b)



A componente E_y vale:

$$E_y = \int dE_y = \int dE\, cos\theta$$

onde

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda(x)dx}{x^2+y^2} = k\frac{A \cdot xdx}{x^2+y^2}$$

e

$$cos\theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Assim:

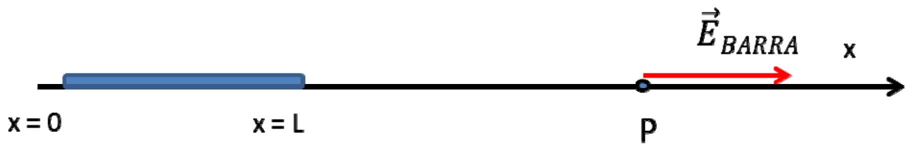
$$E_y = \int_0^L k\frac{A \cdot xdx}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = kAy\int_0^L \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= kAy\left[\frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^L = kA\left[1 - \frac{y}{(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

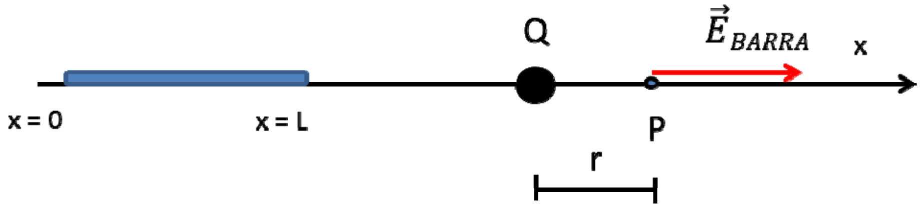
$$= (9 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{-4})\left[1 - \frac{0{,}30}{(0{,}40^2 + 0{,}30^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \rightarrow \boxed{E_y = 7{,}2 \cdot 10^5 \frac{N}{C}}$$

(c)

O ponto *P* e o campo criado pela barra nele estão indicados abaixo:



Como a carga *Q* é negativa, ela deve ser colocada no mesmo eixo *x*, à esquerda de *P*, distando dele de *r*:



Em *P*, para o campo total resultante ser nulo, é preciso que o campo devido a *Q* possua mesmo módulo que o devido à barra:

$$k\frac{|Q|}{r^2} = |\vec{E}_{BARRA}| \rightarrow (9\cdot 10^9)\cdot\frac{0,7\cdot 10^{-6}}{r^2} = 2,8\cdot 10^5 \rightarrow \boxed{r = 1,5\cdot 10^{-1}\ m = 15\ cm}$$

Finalmente, o ponto em que *Q* deve ser posicionada tem coordenadas **(0,85 m, 0, 0)**.