Gabarito G4 de MAT1158 – Cálculo B – 27 de Junho de 2011

1)

(1) A derivada da função $f(x) = \int_x^{x^2} sen(\sqrt{t})\, dt$ é $f'(x) = sen(x) \cdot 2x - sen\left(\sqrt{x}\ \right)$

(2) Calcule o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

(3) A área da região limitada por $y = sen(x),\ x = -1,\ x = \frac{1}{2},\ y = 0$ é $2 - \cos(-1) - \cos\left(\frac{1}{2}\right)$

(4) A derivada de $y = 2^{\sqrt{x}}$ é $y = 2^{\sqrt{x}} = e^{ln 2^{\sqrt{x}}} \rightarrow y' = 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

(6) Se $f(x) = \arctan(3x)$, então $f'(x) = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3$

(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\, e^x}{1+3\, e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot x}{e^x \cdot \left(\frac{1}{e^x}+3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}+3} = \infty$

(8) As soluções de equilíbrio da equação diferencial $\frac{dP}{dt} = \sqrt{P} \cdot (10 - P)$ são $P(t) = 0$ e $P(t) = 10$

(9) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$ (um quarto de circulo de raio 1)

(10) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^7}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^7}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{6 \cdot t^6} + \frac{1}{6 \cdot 1^6} = \frac{1}{6}$

2) Um reservatório é projetado com os extremos no formato da região entre as curvas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = 5$ medidas em metros. Calcule a força hidrostática no extremo do reservatório se ele estiver cheio a uma profundidade de 3 metros com água. Considere ρ a densidade da água. A área do retângulo $A_i = 2x\Delta y = 2\sqrt{2y}\ \Delta y$ que está a uma profundidade $d_i = 3 - y_i$ A força hidrostática é $\int_0^3 2\rho g \cdot (3-y) \cdot \sqrt{2y}\, dy = \frac{24}{5}\sqrt{6}\, \rho g$

3) Seja $f(x) = x \cdot e^x$. Esboce o gráfico de f seguindo o roteiro abaixo:

a) Domínio $\mathbb{R}$

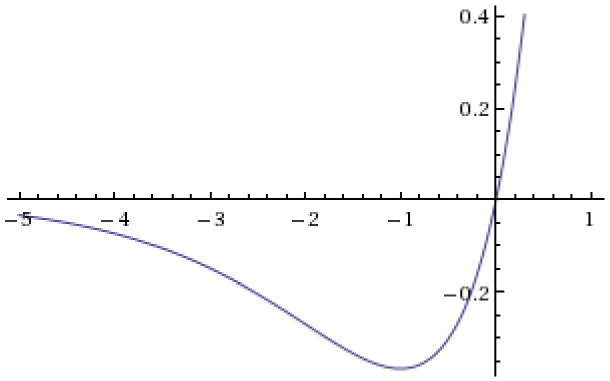
b) Limites no infinito $\lim_{x\to\infty} x \cdot e^x = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$ usando l´Hopital, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

c) Derivada $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (x+1)$

d) Intervalos de crescimento: $(-1, +\infty)$ e decrescimento: $(-\infty, -1)$

e) Extremos locais. máximos: não tem, mínimos: $(-1, \frac{-1}{e})$

f) Assíntotas horizontais: y=0, verticais: não há e inclinadas: também não há.
$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} e^x + \ x \cdot e^x = \infty$



4) Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2\,(x)}{ln(y)}$

Separando as variáveis, $\int ln(y)\, dy = \int cos^2\,(x) \quad dx$ resolvendo a primeira por partes com $u = ln(y) \rightarrow du = \frac{1}{y}dy$ e $dv = dy\ \rightarrow v = y$, $\int ln(y)\, dy = y \cdot ln(y) - y + C_1$

Resolvendo a segunda utilizando a identidade trigonométrica $cos^2\,(x) = \frac{cos(2x)+1}{2}$ logo $\int cos^2\,(x) \quad dx = \frac{1}{2}\int cos(2x) + 1\, dx = \ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{sen(2x)}{2} + x\right) + C_2 = \frac{sen(x)\cdot cos(x)+x}{2} + C_2$ Portanto, $y \cdot ln(y) - y = \frac{sen(x)\cdot cos(x)+x}{2} + C$