Gabarito da P1

1) (i) A equação diferencial $y'(x) - (y(x) - y^2(x))xe^{2x} = 0$ é separável, pode ser escrita como

$$\frac{y'}{y - y^2} = \frac{y'}{y(1-y)} = xe^{2x}.$$

Observando que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$, integramos ambos os termos da equação e obtemos

$$ln(\mid y \mid) - ln(\mid 1 - y \mid) = ln(\frac{\mid y \mid}{\mid 1 - y \mid}) = \frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C$$

no lado direito integramos por partes uma vez. Exponenciando ambos os termos resulta

$$\mid \frac{y(x)}{1 - y(x)} \mid = e^C e^{\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})}.$$

Decorre que

$$y(x) = \frac{Ke^{\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})}}{1 + Ke^{\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})}}.$$

(ii) A equação $xy' + 2y = x^2 - x + 1$ é uma equação linear não homogênea de primeiro grau. Sua parte homogênea $xy' + 2y = 0$ tem solução geral

$$y^h(x) = Kx^{-2},$$

onde K é uma constante, e usando o método dos coeficientes a determinar mostra-se que admite uma solução particular polinomial

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Portanto a solução geral é

$$y(x) = Kx^{-2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}.$$

A mesma fórmula pode ser deduzida usando o método do fator integrante.

(iii) A equação em diferenças finitas $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 6$ é linear não homogênea com parte homogênea $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$. A solução geral da parte homogênea é

$$y_n^h = y_0(\frac{1}{2})^n.$$

A solução geral da equação é

$$y_{n+1} = y_0(\frac{1}{2})^{n+1} + 6\Sigma_{k=0}^n(\frac{1}{2})^k = y_0(\frac{1}{2})^{n+1} + 6.2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}).$$

2) Para que a equação $y'' + 2f(x)y' + f^2(x)y = 0$ admita como solução a função $y(x) = e^{-x}$ substituimos na equação e obtemos

$$e^{-x} - 2f(x)e^{-x} + f^2(x)e^{-x} = 0$$

o que implica que

$$1 - 2f(x) + f^2(x) = 0.$$

Em outras palavras, $f(x)$ deve ser raiz do polinômio $1-2f+f^2 = (1-f)^2$. Portanto, a função $f(x)$ é constante e igual a 1.

(ii) A solução geral da equação do item (i), $y'' + 2y' + y = 0$, é

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x},$$

onde A, B são constantes, dado que o polinômio caracteristico da equação é $p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ que possui uma única raiz real.

(iii) A solução definida pelas condições iniciais $y(0) = 0, y'(0) = 1$, é $y(x) = xe^{-x}$.

3) A equação diferencial $y'(t) = (\frac{1}{2} + t)\frac{y}{5}$ é de primeira ordem e separável, sua solução geral é

$$y(t) = Ke^{\frac{1}{10}(t+t^2)}$$

onde K é uma constante.

i) Se $y(0) = 1$ temos $K = 1$, e o instante s no qual a população dobra é

$$y(s) = 2 = e^{\frac{1}{10}(s+s^2)}$$

o que implica que $ln(2) = \frac{1}{10}(s + s^2)$. Isto nos leva a equação quadrática

$$s^2 + s - 10ln(2) = 0$$

que tem uma única raiz positiva igual a $s = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 40ln(2)})$ que representa o tempo em que dobra a população.

Se a população inicial $y(0) = K > 0$, então o tempo s_k no qual a populaçã dobra é

$$y(s_k) = 2y(0) = 2K = Ke^{\frac{1}{10}(s_k+s_k^2)}$$

o que implica que $2 = e^{\frac{1}{10}(s_k+s_k^2)}$ e portanto $s_k = s$, não depende de K.

ii) Ao aumentar a função t para $2\pi t$ a taxa de variação da população aumenta, o que implica que o tempo de duplicação da população diminui.

4) (i) A família das curvas $y(x) = C(1 + x^2)$ é o conjunto das curvas de nível da função

$$F(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}.$$

Parametrizando as curvas como gráficos $\alpha(x) = (x, y(x))$ temos então $F(x, y(x)) = 0$ e derivando com relação a x temos a equação exata procurada:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

Substituindo obtemos

$$-\frac{2xy}{1 + x^2}dx + dy = 0.$$

(ii) A solução definida pela condição inicial $y(1) = 2$ tem constante C dada por $y(1) = 2 = C(1 + 1^2) = 2C$. Ou seja, $C = 1$, e a solução procurada é $y(x) = 1 + x^2$.