PUC-RIO – CB-CTC

P4 DE ELETROMAGNETISMO – 30.11.11 – quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:_____________________________________Turma:_______________

<u>**NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.**</u>

<u>**Não é permitido destacar folhas da prova**</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	2.5		
2ª Questão	2.0		
3ª Questão	2.5		
4ª Questão	3.0		
Total	10,0		

<u>**A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.**</u>

Formulário:

<u>Volumes</u>: $\frac{4}{3}\pi R^3$ (Esfera de raio R)

$\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

<u>Superfícies</u>: $4\pi R^2$ (Esfera de raio R)

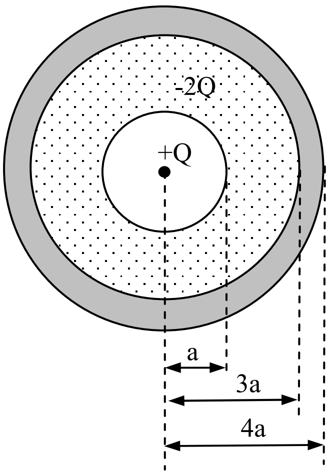
$2\pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

$\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ C^2 / (N\ m^2)$

$k = 9 \times 10^9\ N\ m^2 / C^2$

1ª Questão (2.5)

Uma esfera isolante oca de raio interno "a" e raio externo "3a" tem carga -2Q distribuída uniformemente em seu volume. No centro da esfera oca está uma carga puntiforme de valor +Q. Ao redor da esfera isolante e concêntrica a ela, se encontra uma casca esférica metálica de raio interno "3a" e raio externo "4a" (ver figura). Não se conhece a carga desta casca condutora. A partir da Lei de Gauss, responda aos itens abaixo.



(a) (**1.0**) Encontre o vetor campo elétrico nas seguintes regiões do espaço:

(i) r = a/2

(ii) r = 2 a

Sabendo que em r = 4a o campo elétrico vale : $\vec{E} = -k\dfrac{Q}{4a^2}\hat{r}$

(b) (**1.0**) Calcule as densidade de cargas superficiais interna e externa da casca condutora.

(c) (**0.5**) Qual é o potencial elétrico da casca condutora?

SOLUÇÃO

(a) (i) $r = a/2$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E\, dA = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r^2} \qquad Q_i = +Q \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$\boxed{\bar{E} = k\frac{4Q}{a^2}\hat{r}}$$

(ii) $r = 2a$ ⇒ Superfície gaussiana passando dentro do isolante.

Carga interna = $Q + Q_i$

$$Q_i \Rightarrow \frac{-2Q}{\frac{4}{3}\pi(27a^3 - a^3)} = \frac{Q_i}{\frac{4}{3}\pi(8a^3 - a^3)} \Rightarrow Q_i = -2Q\frac{7\cancel{a^3}}{26\cancel{a^3}}$$

$$Q_i = -\frac{7}{13}Q \Rightarrow \text{carga interna} = Q + \left(-\frac{7}{13}Q\right) = Q\left(1 - \frac{7}{13}\right)$$

Por Gauss :

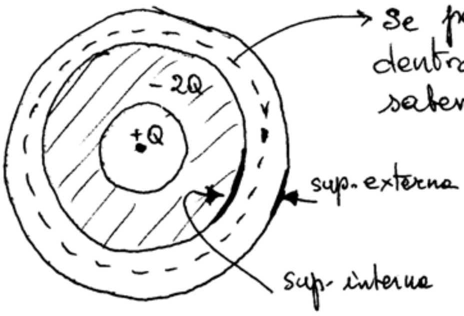
$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q\left(1-\frac{7}{13}\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E\, dA = \frac{Q\left(1-\frac{7}{13}\right)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q\left(1-\frac{7}{13}\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q\left(1-\frac{7}{13}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k\,\frac{Q\left(1-\frac{7}{13}\right)}{r^2}$$

mas $r = 2a$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{kQ}{4a^2}\frac{6}{13}\,\hat{r} = \boxed{\frac{3kQ}{26a^2}\,\hat{r}}$$

b) Sabemos que em $r = 4a$: $\bar{E} = -\frac{kQ}{4a^2}\hat{r}$



Se passamos uma superfície gaussiana dentro da casca condutora, sabemos que : $\bar{E} = \bar{0}$.

$\Downarrow$

Portanto a carga interna a esta superfície gaussiana deverá ser nula

$$\Longrightarrow \text{carga sup. interna} = -(+Q-2Q) = +Q$$

Portanto : $\boxed{\sigma_i = \frac{+Q}{4\pi 9 a^2}}$

Para a densidade externa vou usar o dado :

$\bar{E} = -k\frac{Q}{4a^2}\hat{r}$ em $r = 4a$.

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_i = +Q - 2Q + Q + q_{ext}$$

$$|E(4a)| = \frac{k\,Q_i}{16a^2} = -\frac{kQ}{4a^2} \Rightarrow Q_i = -4Q$$

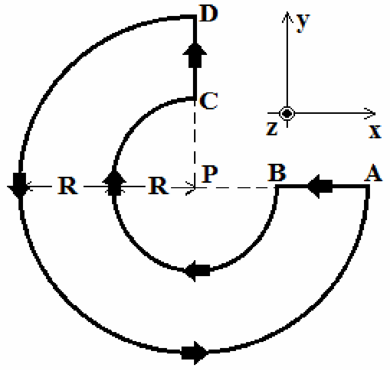
$$Q_i = Q - 2Q + Q + q_{ext} = -4Q \Rightarrow \boxed{q_{ext} = -4Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ext} = -\frac{4Q}{4\pi\, 16a^2} = -\frac{Q}{16\pi a^2}}$$

c) $V = -k\frac{4Q}{4a} = -k\frac{Q}{a} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon a}$

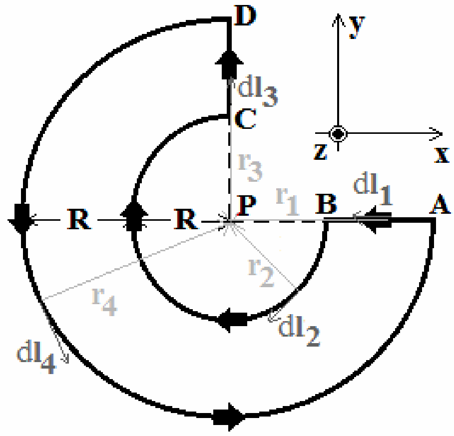
2 Questão: (2.0)

A figura abaixo apresenta um circuito formado por dois arcos de circunferência BC e DA, respectivamente de raios R e 2R, que formam um setor de ângulo $\theta = 3\pi/2$, além de duas seções retilíneas AB e CD, ambas de comprimento R. Considere que o circuito é percorrido por uma corrente elétrica I, conforme indicado na figura. Determine, justificando sua resposta, a contribuição de cada segmento para o vetor campo magnético B (módulo, direção e sentido) no ponto P, localizado no centro comum aos setores circulares para:



a) (**0.5**) B1 e B3, referentes às contribuições dos segmentos retilíneos AB e CD.
b) (**0.5**) B2, referente à contribuição do arco BC de raio R.
c) (**0.5**) B4, referente à contribuição do arco DA de raio 2R.
d) (**0.5**) Calcule o campo magnético resultante BT no ponto P.

<u>SOLUÇÃO</u>



Pela Lei de Biot-Savart: $d\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi).I.(\mathbf{dl} \times \mathbf{r})/r^2$

b) Para as contribuições dos segmentos retilíneos:

$\mathbf{dl_1} \,//\, \mathbf{r_1}$ no segmento AB sobre o eixo x ($\theta = 0$ rad) $\rightarrow \mathbf{B_1} = \mathbf{0}$

$\mathbf{dl_3} \,//\, \mathbf{r_3}$ no segmento CD sobre o eixo y ($\theta = \pi$ rad) $\rightarrow \mathbf{B_3} = \mathbf{0}$

c) Para o arco BC, de raio R, $\mathbf{dl_2} \perp \mathbf{r}_2$:

$\mathbf{B_2} = (\mu_0/4\pi).I.\int(\mathbf{dl_2} \times \mathbf{r}_2)/r^2 \rightarrow \mathbf{B_2} = (\mu_0/4\pi).I.\int dl_2/R^2$ **(-z)**; $\quad dl_2 = R.d\theta$

$\mathbf{B_2} = (\mu_0/4\pi).I.\int d\theta\ /R$ **(-z)** $\rightarrow \mathbf{B_2} = -(\mu_0/4\pi).I/R\ .\int d\theta$ **(z)**

$\mathbf{B_2} = -(\mu_0/4\pi).I.(3\pi/2 - 0)/R$ **(z)** $\rightarrow \mathbf{B_2} = -(3\mu_0/8).I/R$ **(z)**

ou seja, o campo está apontando para dentro do plano da folha.

d) Para o arco DA, de raio 2R, ($\mathbf{dl_4} \times \mathbf{r_4}$) tem sentido +**z**, e procedendo de maneira análogo à $\mathbf{B_2}$**,** se obtém:

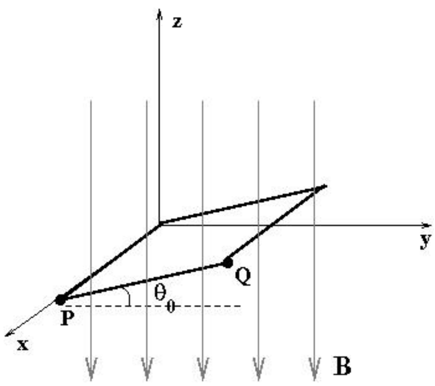
$\mathbf{B_4} = (3\mu_0/8).I/(2R)$ **(+z)** $\rightarrow \mathbf{B_4} = (3\mu_0/16).I/R$ **(z)**

ou seja, o campo aponta saindo do plano da folha.

e) $\mathbf{B_T} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \mathbf{B_3} + \mathbf{B_4} = (3\mu_0/8).I/R\ (-1 + 1/2)$**(z) = -**$(3\mu_0/16).I/R$ **(z)**

3ª Questão: (2.5)

Uma espira quadrada de lado a está localizada em uma região onde há um campo magnético homogêneo na direção –z. Em um determinado instante (tome-o como t = 0) o campo tem módulo B e o plano da espira faz um ângulo θ_0 com o plano xy (ver figura). Considere as seguintes situações independentes:



Situação 1: O campo magnético decresce a uma taxa constante tal que após um tempo τ seu valor é zero.

(a) (**0.5**) Indique, justificando, o sentido da corrente induzida (P a Q ou Q a P).

(b) (**1.0**) Ache o valor da *fem* induzida na espira.

Situação 2: O campo magnético é constante no tempo e a espira começa a girar (em sentido anti-horário) em torno do eixo x com velocidade angular constante ω.

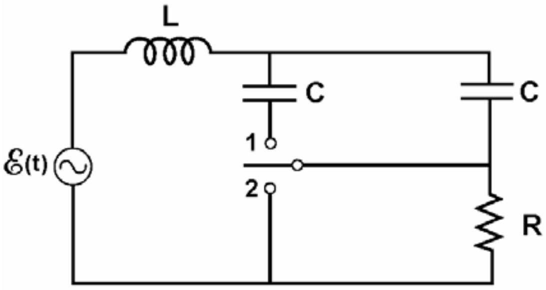
(c) (**1.0**) Ache a *fem* induzida em função do tempo.

(d) (**0.5**) Para quais valores de θ (ângulo do plano da espira em relação ao plano xy) esta *fem* induzida tem valor máximo (em módulo)? Justifique.

SOLUÇÃO

4ª Questão: (2.5)

A fonte de *fem* CA da Figura é representada pela expressão E(t) = Em sen (ω t), onde Em = 100 V e ω = 1000 rad/s. Com a chave aberta, a corrente resultante está adiantada de π/4 em relação à *fem* da fonte. Com a chave na posição 1, a corrente resultante está atrasada de π/4 em relação à *fem* da fonte. Com a chave na posição 2, a corrente máxima no circuito resultante é igual a 2 A.



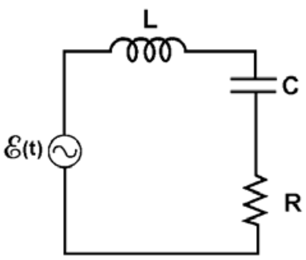
(a) (**1,0**) Desenhe o diagrama de fasores para o circuito correspondente à chave aberta, indicando se o mesmo é indutivo ou capacitivo.

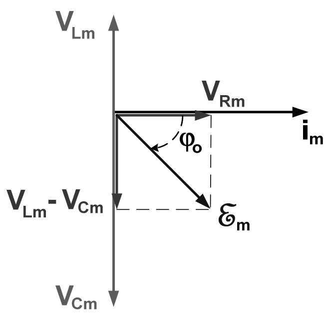
(b) (**0,5**) Indique, justificando, se o circuito correspondente à chave na posição 2 é ressonante.

(c) (**1,0**) Determine os valores de R, L e C.

<u>SOLUÇÃO</u>

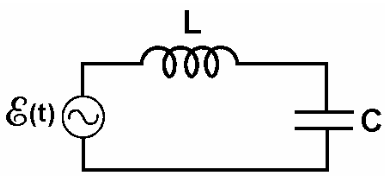
(a) O circuito correspondente à chave aberta está mostrado abaixo. O diagrama fasorial apresentado ao seu lado mostra que o circuito correspondente à chave aberta é capacitivo.



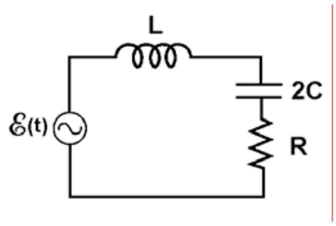


(b) Sabe-se que, para o circuito RLC em série, em geral : $i_m = \mathcal{E}_m \Big/ \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$

O circuito correspondente à chave na posição 2, mostrado embaixo, tem resistência nula e seria ressonante se ωL = 1/ωC, o que faria $i_m \to \infty$. Entretanto, foi dito que $i_m = 2$ A. Portanto, o circuito correspondente à chave na posição 2 não é ressonante.



(c) O circuito correspondente à chave na posição 1 está mostrado ao lado. Portanto, os circuitos correspondentes à chave aberta e nas posições 1 e 2 fornecem, respectivamente:



$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \tan(-45^o) = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega C} - \omega L = R \qquad (1)$$

$$\frac{\omega L - \frac{1}{2\omega C}}{R} = \tan(45^o) = 1 \quad \rightarrow \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{1}{2\omega C} = R \qquad (2)$$

$$\sqrt{\left(\omega L - {}^{1}/_{\omega C}\right)^2} = {}^{\mathcal{E}_m}/_{i_m} = 50 \quad \rightarrow \quad \left|\omega L - {}^{1}/_{\omega C}\right| = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = 50 \qquad (3)$$

A equação (1) indica claramente a maneira pela qual o módulo que aparece na equação (3) deve ser transformado (R é positivo). A comparação entre as equações (1) e (3) mostra que R=50 Ω. Somando-se (2) + (3) membro a membro, tem-se:

$$\frac{1}{2\omega C} = 100 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega C} = 200 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{200.000} = 5 \ \mu\text{F}$$

Finalmente, a equação (1) fornece: $\omega L = \frac{1}{\omega C} - R \quad \rightarrow \quad \omega L = 150 \quad \rightarrow \quad L = 0{,}15$ H