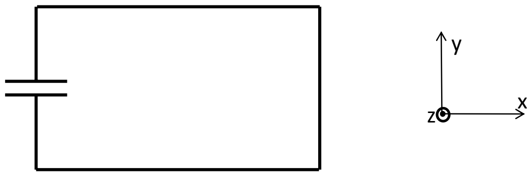
1ª Questão: (3.5)

Um capacitor de placas paralelas (C = 40 μF) é inserido em série com uma espira retangular, constituindo um circuito fechado conforme a figura. Os fios possuem resistência desprezível e o circuito possui área total A = 3/π m^2.



O circuito está localizado numa região onde o vetor campo magnético é uniforme no espaço e variável no tempo de acordo com a expressão: $\vec{B}(t) = 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)\hat{z}$ (unidades Tesla e segundos).

(a) (**1.0**) Calcule o fluxo magnético em função do tempo, $\phi(t)$, que atravessa a superfície delimitada pelo circuito, justificando cuidadosamente todos os passos a partir da definição $\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$ e fornecendo também o valor máximo do fluxo ϕ_{MAX} na unidade do SI.

(b) (**0.8**) Encontre a fem induzida no circuito como função do tempo, $\varepsilon(t)$, calculando também o seu valor máximo ε_{MAX} e a sua unidade no SI.

(c) (**0.7**) No instante t = 0 o capacitor C encontra-se descarregado. Calcule a sua carga em função do tempo, Q(t), calculando, também, o seu valor máximo, Q_{MAX} e sua unidade no SI.

(d) (**1.0**) Durante o primeiro ciclo completo 0 ≤ t ≤ 10 s em quais intervalos de tempo a placa superior do capacitor possui carga positiva e em quais possui carga negativa? Responda também em quais intervalos de tempo a corrente induzida possui o sentido horário e em quais possui o sentido anti-horário. **Justifique todas as suas afirmações**.

SOLUÇÃO

(a) O fluxo magnético é dado por:

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

No presente caso, $\vec{B} = B(t)\hat{z}$ é paralelo em toda a região ao vetor unitário $d\vec{A} = dA\,\hat{z}$.
E como o campo é também uniforme em toda a região do circuito,

$$\phi = B\int dA = B\,A$$

Substituindo os dados:

$$\phi(t) = \frac{1{,}5}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \qquad \phi_{MAX} = \frac{1{,}5}{\pi}Wb$$

(b) A fem induzida no circuito será :

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi}{dt} = 0{,}3\; sen\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \qquad \varepsilon_{MAX} = 0{,}3\,V$$

(c) Para o capacitor:

$$Q(t) = C\varepsilon(t) = (40)\; 0{,}3\; sen\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$$

$$Q(t) = 12\; sen\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \qquad Q_{MAX} = 12\;\mu\, C$$

(d) Analisando o sinal da função seno na expressão obtida no item (c), conclui-se que:

Na primeira metade do ciclo (intervalo $0 \le t \le 5s$), a carga na placa superior do capacitor tem sinal positivo, e na segunda metade do ciclo (intervalo $5 \le t \le 10s$), sinal negativo.

Já a corrente é dada pela taxa de variação (derivada) da carga:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = 12\,\frac{2\pi}{10}\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) = 2{,}4\pi\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$$

Analisando o sinal da função cosseno nessa expressão, conclui-se que:

No primeiro quarto do ciclo (intervalo $0 \le t \le 2{,}5s$) a carga na placa superior do capacitor tem sinal positivo, passando a ter sinal negativo no intervalo $2{,}5 \le t \le 7{,}5s$ e voltando a ter sinal positivo no intervalo $7{,}5 \le t \le 10$ s.

2ª Questão: (3.5)

No circuito da Figura 1 tem-se $\varepsilon = 10$ V , $R_1 = 10\ \Omega$, o capacitor e o indutor inicialmente sem energia e as seguintes fases sucessivas:

Fase 1: chave S_1 fechada e S_2 aberta durante longo tempo.
Fase 2: chave S_1 aberta e S_2 fechada durante longo tempo.

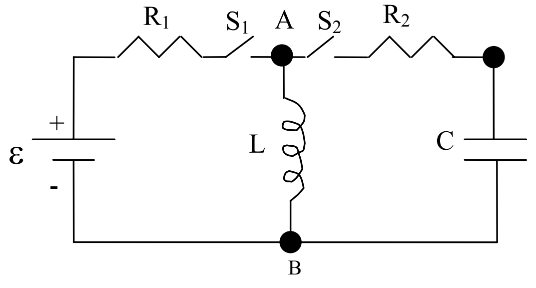


Figura 1

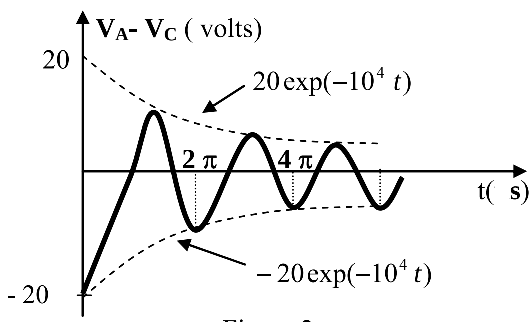


Figura 2

Durante a **fase 2** a d.d.p. $\mathbf{V_A – V_C}$ em função do tempo corresponde ao gráfico da Figura 2, tendo a escala do tempo no eixo horizontal expressa em μs (10^{-6} s). Assumindo que a frequência angular de oscilação amortecida (ω_0') possa ser aproximada pela frequência angular de oscilação livre (sem amortecimento) (ω_0), determine:

(a) (**0.7**) A corrente máxima no indutor no final da **fase 1**.

(b) (**0.7**) A resistência R_2 (*Sugestão: utilize o gráfico da Fig.2 e a lei de Ohm*).

(c) (**0.7**) Os valores da capacitância C e da indutância L.

(d) (**0.7**) A energia dissipada em R_2.

(e) (**0.7**) A taxa de variação da corrente no indutor no início da **fase 2**.

SOLUÇÃO

(a) final da fase 1 : indutor como " curto" $\Rightarrow$ i_L máxima = ε/R_1 = 10 /10= 1A **com sentido A→ B**

(b) fase 2: circuito RLC com oscilação amortecida e $i_L(t) = i_{L\,max}\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$; $i_{L\,max}$ = 1 A

figura 2: início da fase 2 $\Rightarrow$ $(V_A – V_C)(0)$ = - 20 = - R_2 $i_{L\,max}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{R_2 = 20\ \Omega}$

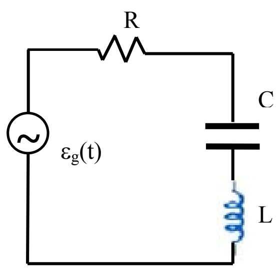
(c) figura 2: fator de amortecimento $\gamma = 10^4 = R_2 / 2L \Rightarrow$ **L = 0,001 H**

figura 2: período da oscilação = T= 2π x10^{-6} $\Rightarrow$ ω= 10^6 rad/s = $1/\sqrt{LC}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C = 10^{-9}\ F}$

(d) **Energia consumida** = energia armazenada no indutor no final das fase 1 = ½ L($i_{L\,Max}$)^2 = $\mathbf{5x10^{-4}\ J}$

(e) início da fase 2 : Ldi/dt (0) = $(V_A – V_B)(0)$ = $(V_A – V_C)(0)$ + V_C= - 20 $\Rightarrow$ **di/dt (0) = - $\mathbf{2x10^4}$ A/s**

3ª Questão: (3.0)



Considere um circuito de corrente alternada (CA) do tipo *RLC* em série, como mostrado na figura ao lado, onde R, C e L são dados.

Se $\varepsilon_g(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ é a d.d.p. da fonte de CA em função do tempo, determine justificando todas as suas respostas:

(a) (**0.8**) Para qual frequência angular ω da fonte a amplitude da voltagem através do resistor V_R é máxima? Qual será o seu valor ?

(b) (**0.7**) Para qual frequência angular ω da fonte a amplitude da voltagem através do indutor V_L é máxima?

(c) (**0.7**) Para qual frequência angular ω da fonte a amplitude da voltagem através do capacitor V_C é máxima?

(d) (**0.8**) Determine uma expressão para a razão V_C/ε_0. Mostre que esta razão tende a 1 (um) quando ω decresce e que é proporcional a ω^{-2} para valores elevados.

SOLUÇÃO

Usamos que a impedância tem modulo $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ e que $i_0 = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}$

(a) Temos que $V_R = Ri_0 = \frac{R}{|Z|}\varepsilon_0$ é máximo quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$ *(ressonância) Neste caso* $V_R = \varepsilon_0$.

(b) Temos que $V_L = \omega L i_0 = \frac{\omega L}{|Z|}\varepsilon_0$ é máximo quando $\omega \to \infty$. *Neste caso* $V_L = \varepsilon_0$.

(c) Temos que $V_C = \frac{i_0}{\omega C} = \frac{1}{\omega C|Z|}\varepsilon_0$ é máximo quando $\omega = 0$. *Nste caso* $V_C = \varepsilon_0$.

(d) Usando (c): $\dfrac{V_C}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\omega C|Z|}$ que vai à 1 quando $\omega \to 0$, e para $\omega \to \infty$ vai para:
$\dfrac{V_C}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\omega^2 CL}$