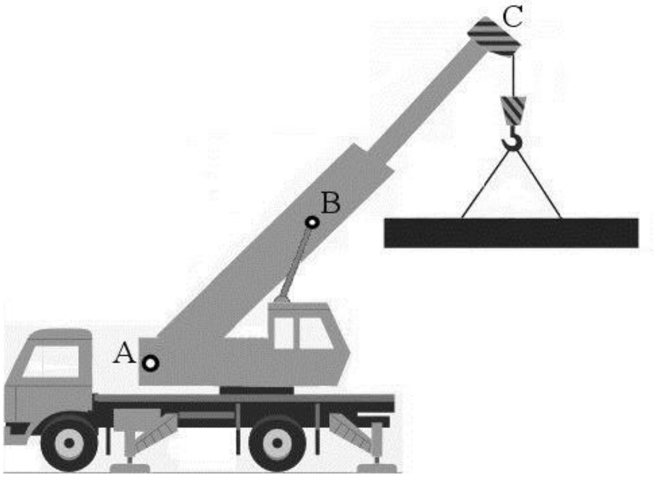
G3 – FIS1026 – 19/11/2013

(1ª questão: 3,0 pontos) O caminhão-grua ilustrado ao lado, está com sua lança esticada de L = 10 m desde o seu eixo (A) até a sua ponta (C). Sua inclinação é de 37º em relação à horizontal. A massa da lança é m_L = 400 kg e para simplificar os cálculos considere-a uniformemente distribuída. O caminhão está estacionado, com a lança sustentando uma viga de aço de 5,0 m comprimento e massa m_v = 600 kg, que se encontra na posição horizontal. De forma a manter tudo em equilíbrio estático, um braço hidráulico no topo da cabine de controle, inclinado de 67º em relação à horizontal, atua com uma força F_b = 25.600 N no centro de massa da lança (B). Despreze o atrito da lança com o eixo e as massas dos cabos e do gancho.



Utilize: sen (37º) = 0,60; cos (37º) = 0,80 ; sen (67º) = 0,92; cos (67º) = 0,39.

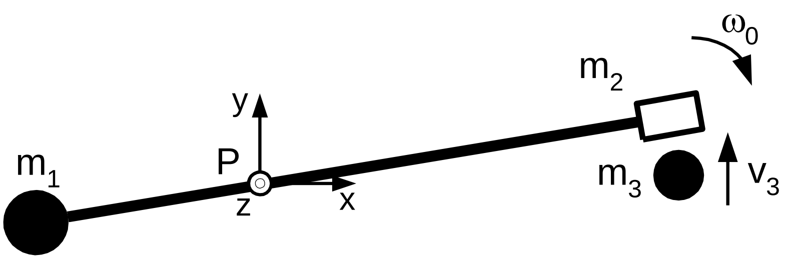
a) Determine o vetor torque $\vec{\tau}_A$ em relação ao eixo exercido pelo braço hidráulico sobre a lança.

b) Determine o vetor força $\vec{F}_A$ que atua sobre a extremidade da lança presa ao eixo.

c) Suponha agora que em determinado instante, o braço hidráulico pare de atuar, calcule para este instante o módulo da aceleração angular da lança.

(2ª questão: 3,5 pontos) A figura mostra uma montagem de laboratório utilizada para experiências de momento angular. Ela é composta por 3 corpos: i) uma haste fina de massa M = 0,3 kg e comprimento L = 0,4 m articulada por um eixo sem atrito (localizado no ponto P) distante 0,1 m de uma de suas extremidades; ii) uma pequena esfera sólida de massa m_1 = 0,1 kg, presa à extremidade mais próxima ao eixo da haste e iii) um aro de raio r = 0,01 m e massa m_2 = 0,1 kg preso à outra extremidade. A montagem está girando no plano horizontal com velocidade angular ω_0 = 10 rad/s (no sentido horário), quando sofre uma colisão ao se encontrar na posição à 20º acima do eixo x com uma esfera sólida de massa m_3 = 0,2 kg que se move com velocidade $\vec{v}_3 = 20\ m/s(\hat{j})$. A esfera fica presa no aro.

Considere as esferas como massas pontuais. Utilize: sen (20º) = 0,34; cos (20º)= 0,94.



a) Calcule o momento de inércia de cada componente da montagem em torno do ponto P, formado pela haste fina, esfera de massa m_1 e aro.

b) Calcule o vetor momento angular total do sistema imediatamente antes da colisão ($\vec{L}_{antes}$). Responda se haverá ou não conservação do momento angular do conjunto durante a colisão, justificando cuidadosamente.

c) Calcule o módulo da velocidade angular imediatamente após a colisão ω_f e informe também o sentido da rotação do conjunto.

(3ª questão: 3,5 pontos) Um ioiô com massa m = 120 g e com raio do eixo r = 3,20 mm possui momento de inércia de I_0 = 950 gcm^2. Sua corda tem 120 cm de comprimento, é inextensível e tem massa desprezível. No momento em que é lançado verticalmente para baixo, o ioiô tem somente velocidade de translação $\vec{v}_{0cm} = 1{,}30\ m/s(-\hat{j})$. Assuma que não há deslizamento entre a corda e o eixo do ioiô.

a) Escreva as equações de movimento do ioiô sob sua forma literal.

b) Determine o valor da aceleração do centro de massa do ioiô durante seu movimento.

c) Determine a energia cinética total do ioiô no instante em que ele chega a 60 cm abaixo do ponto da onde foi lançado.

d) Determine o valor da energia cinética relacionado ao movimento de rotação neste instante.

GABARITO

(1ª questão: 3,0 pontos)

[1.0] **a) O torque produzido em A pelo braço hidráulico é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_b}$. O ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F_b}$ é 30º (67º - 37º). $\vec{\tau} = \frac{L}{2}\ F_b\ sen(30) = 64.000\ Nm\ \vec{K}$ (direção e sentido são obtidos pela regra da mão direita).**

[1.0] **b) Como estamos em equilíbrio estático $\sum \tau = 0, \sum F_x = 0\ e\ \sum F_y = 0$**

$\Sigma F_x = F_{Ax} + F_m \cos(67) = 0 \rightarrow F_{Ax}$ = - 25.600 . 0,39 = - 9.984 N

$\Sigma F_y = F_{Ay} + F_m\ sen(67) - m_L g - m_v g = 0 \rightarrow F_{Ay}$ = - 25.600 . 0,92 + 4000 + 6000 = - 13.552 N

$\vec{F_A} = [9.984\ (-\vec{i}) + 13.552\ (-\vec{j})]$ N

[1.0] **c) Quando o braço hidráulico para de atuar a lança tem uma aceleração angular dada por**

$\alpha = \Sigma\tau_A / I$ onde I é o momento de inércia em torno de A.

$I = I_{cm} + m_L r^2 = 1/12\ m_L\ L^2 + m_L\ (L/2)^2 = 1/3\ m_L\ L^2 = 13.333$ kg m^2

Como o sistema estava em equilíbrio com o braço atuando, implica que os torques causados pelo peso da lança e pelo peso da viga são iguais a $-\ 64.000\ Nm\ \vec{K}$ ou:

$\tau_{L} + \tau_v = -\ L/2 \cos(37)\ m_L g\ - L \cos(37)\ m_v g = -\ 16.000 - 48.000 = -\ 64.000\ Nm$

α = 64.000 / 13.333 = 4,8 rad/s^2

(2ª questão: 3,5 pontos)

[1.5] **a) <u>Esfera 1 (massa pontual)</u>:** $I_1 = m_1.r_1^2 = m_1.(L/_4)^2$

$I_1 = (0,1).(0,1)^2 = 1 \times 10^{-3} kg.m^2$

<u>Aro</u>: $I_2 = m_2.r^2 + m_2.K_2{}^2 = m_2.r^2 + m_2.(3L/_4 + r)^2$

$I_2 = (0,1).\left[(0,01)^2 + (0,31)^2\right] = 9,62 \times 10^{-3} kg.m^2$

<u>Haste</u>: $I_{haste} = I_{barra}^{C.M.} + M.K_{haste}{}^2 = M.L^2/_{12} + M.\left(L/_4\right)^2 = 7.M.L^2/_{48}$

$I_{haste} = 7.(0,3).(0,4)^2/_{48} = 7 \times 10^{-3} kg.m^2$

[1.0] **b)** $\vec{L}_{antes} = (\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_{haste}) + \vec{l}_3$

$\vec{L}_{antes} = [I_1.\omega_0(-\hat{k}) + I_2.\omega_0(-\hat{k}) + I_{haste}.\omega_0(-\hat{k})] + \vec{r}_3 \times \vec{p}_3$

$\vec{L}_{antes} = (I_1 + I_2 + I_{haste}).\omega_0(-\hat{k}) + \left(3L/_4 + r\right).(m_2.v_2).sen70°(+\hat{k})$

$\vec{L}_{antes} = [(17,6 \times 10^{-3}).10(-\hat{k}) + (0,31).[(0,2).20].(0,94)(+\hat{k})$

$\vec{L}_{antes} = 9,89 \times 10^{-1}\, \mathrm{Kg.m^2}/_s\, (+\hat{k})$

Trata-se de um sistema fechado (massa total constante); as forças relacionadas com a colisão entre a partícula 2 e a haste (forças internas) formam par ação e reação, gerando torques simétricos na direção $\hat{k}$ que se anulam; e o sistema está livre de forças que gerem torques externos na direção do eixo Z. Logo, $|\vec{\tau}_R| = d|\vec{L}|/dt = 0$, acarretando na conservação do momento angular total do conjunto na direção do eixo Z.

[1.0] **c)** $\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{após}$ **(conservação do momento angular total do sistema)**

$9,89 \times 10^{-1}(+\hat{k}) = I_{conjunto}.\vec{\omega}_f \quad \rightarrow 9,89 \times 10^{-1}(\hat{k}) = (I_1 + I_2 + I_{haste} + I_3).\vec{\omega}_f;$

<u>Esfera 3 (massa pontual)</u>: $I_3 = m_3.K_3{}^2 = m_3.(3L/_4 + r)^2$

$I_3 = (0,2).(0,31)^2 = 19,2 \times 10^{-3} kg.m^2$

$\vec{\omega}_f = (9,89 \times 10^{-1})/(19,2 \times 10^{-3} + 17,6 \times 10^{-3})\,(+\hat{k}) \rightarrow \vec{\omega}_f = (26,9\; rad/_s)(+\hat{k})$

$|\vec{\omega}_f| = 26,9\, rad/s$ **(rotação no sentido anti-horário).**

(3ª questão: 3,5 pontos)

[1.0] **a) Para o sistema translacional temos:** $T - Mg = - Ma_{cm}$ **(1)**

Para o sistema rotacional temos: $-\tau = -I\alpha \rightarrow T.R = I\alpha$ **(2)**

[0.5] **b) Como rola sem deslizar** $T.R = Ia_{cm}/R \rightarrow T = Ia_{cm}/R^2$ **substituindo em (1) temos:**

$Ia_{cm} / R^2 – Mg = - Ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = g / [1 + (I/MR^2)] = 0.125\ m/s^2$ **na direção -y**

[1.0] **c) Para calcular a energia cinética do ioiô em 60cm, usamos a conservação da energia com a origem do potencial em 60 cm:**

$E_1 = E_2$ **, com isto:**

$1/2MV^2_{0cm} + Mgh = ½ I\omega^2 + 1/2MV^2_{cm}$

$1/2MV^2_{0cm} + Mgh = 0,82\ J$

em 60cm somente teremos energias cinéticas, por tanto, a energia cinética total associada ao movimento é:

$K = 0,82J$

[1.0] **d) A energia cinética total é:** $K = K_t + K_r$

onde K_t **é a energia cinética translacional e** K_r **é cinética rotacional, para calcular** K_t **fazemos:**

$K_t = ½\ MV^2_{cm}$ **com** V_{cm} **sendo o módulo da velocidade do ioiô em 60cm,**

$V^2_{cm} = V^2_{0cm} + 2ay = 1,84\ m^2 / s^2$

$K_t = ½\ MV^2_{cm} = 0,11\ J$

$K_r = 0,82 - K_t = 0,71\ J$