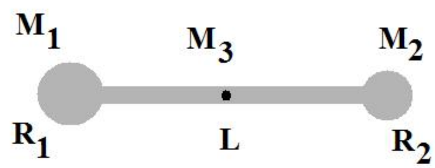
## G3 – FIS1026 – 21/11/2012

Nome: ___________________________________ Matrícula: __________

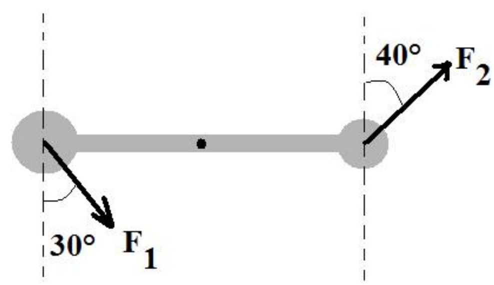
## 1ª QUESTÃO (3,5 pontos)

Seja um corpo rígido composto de uma esfera maciça de massa $M_1$ =2,0 kg e raio $R_1$ =15 cm, uma esfera oca de massa $M_2$ =1,0 kg e raio $R_2$ =10 cm, e uma barra fina de massa $M_3$ =1,0 kg e comprimento L=50cm. Este corpo está sobre uma mesa horizontal e pode girar em torno de um eixo vertical fixo que passa no centro da barra, indicado pelo ponto na figura ao lado. Não há atrito com a mesa ou com o eixo de rotação.

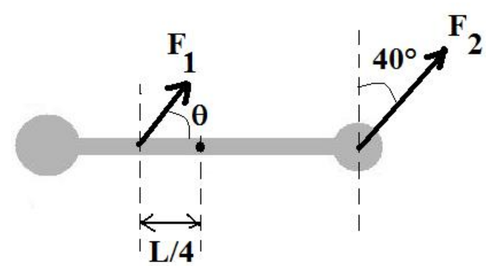



a) [1,5] Calcule o momento de inércia deste corpo em relação ao eixo indicado.

b) [1,0] Sejam duas forças agindo no centro de cada esfera, como mostrado ao lado. Os módulos das forças aplicadas são $F_1$ = 10N e $F_2$ = 20N. Encontre o modulo da aceleração angular e o sentido da rotação resultante (horário ou anti-horario).

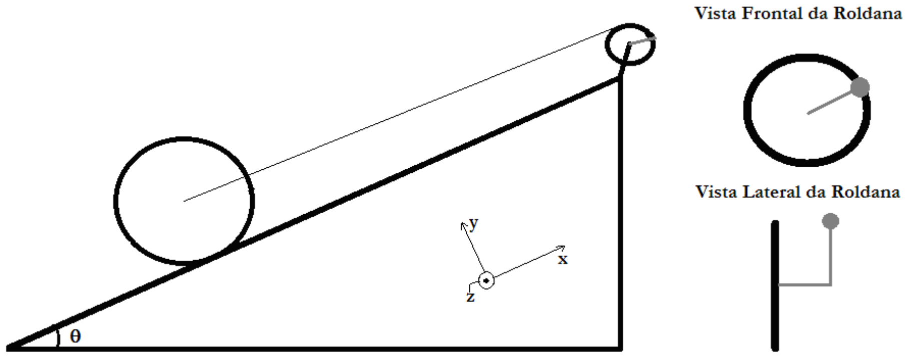



c) [1,0] Agora, duas forças agem nas posições indicadas: a força 1 a uma distancia L/4 do centro da barra e a força 2 no centro da esfera oca. Os módulos das forças aplicadas são $F_1$ = 30N e $F_2$ = 10N. Calcule o ângulo θ necessário para que o corpo não apresente movimento rotacional.




## 2ª QUESTÃO (3,5 pontos)

A figura a seguir mostra um dispositivo utilizado para puxar uma esfera oca de raio R=0,25m e massa M = 6kg rolando sem deslizar ao longo de um plano com inclinação θ = 30° em relação à horizontal. A esfera é puxada da base do plano inclinado a partir do repouso por uma roldana (disco sólido) de raio r = 0,1m e massa m = 4kg pela aplicação de uma força F constante na direção tangente à posição de uma manivela (comprimento l = r e massa desprezível) fixada em um eixo que passa no centro de massa da roldana, conforme mostra a vista frontal do dispositivo. Adote $g = 10m/s^2$, despreze os efeitos de atrito no eixo da roldana e considere o fio ideal.

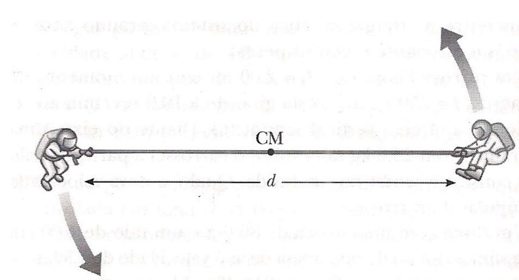



A força F é tal que suspende a esfera oca ao longo da rampa com uma aceleração de centro de massa constante $a_{cm} = 2{,}5m/s^2$.

(a) [1,0] Determine a energia cinética da esfera oca dois segundos após o início do movimento.
(b) [0,5] Determine o vetor momento angular final da esfera oca, em relação ao seu centro de massa, dois segundos após o início do movimento.
(c) [1,0] Faça o diagrama do corpo livre para a esfera oca e para a roldana e escreva as equações que regem os movimentos destes corpos.
(d) [1,0] Obtenha o módulo da força F aplicada à manivela.

## 3ª QUESTÃO (3,0 pontos)

Dois astronautas, cada um tendo massa M, estão ligados por uma corda de comprimento d, com massa desprezível. Eles se encontram isolados no espaço, orbitando ao redor do centro de massa comum com velocidades escalares v, tangenciais à corda, no sentido mostrado na figura. Modele os astronautas como partículas.




(a) [1,0] Encontre o módulo do momento angular do sistema em relação ao centro de massa.
(b) [1,0] Os astronautas começam a puxar a corda simultaneamente de tal forma que, ao final, reduzem sua distância para d/2. Nesta nova configuração, determine o período de rotação dos dois em relação ao centro de massa comum.
(c) [1,0] Calcule o trabalho total realizado pelos astronautas ao recolher a corda.

## $1^a$ Questão

a) O momento de inércia para este corpo pode ser calculado pela soma de cada termo individual:
$I = I_{ESFERA\ MACIÇA} + I_{BARRA} + I_{ESFERA\ OCA}$
A barra esta girando em volta de um eixo que passa pelo centro de massa da mesma. Assim:
$I_{BARRA} = (1/12)M_3L^2$
Para a esfera maciça temos que usar o teorema dos eixos paralelos:
$I_{ESFERA\ MACIÇA} = I_{CM} + M_1h^2$, onde h é a distancia entre o eixo de rotação e centro de massa da esfera maciça: $h = L/2 + R_1 \rightarrow I_{ESFERA\ MACIÇA} = (2/5)M_1R_1^2 + M_1(L/2 + R_1)^2$.
Para a esfera oca temos que usar também o teorema dos eixos paralelos:
$I_{ESFERA\ OCA} = I_{CM} + M_2h^2$, onde h é a distancia entre o eixo de rotação e centro de massa da esfera oca: $h = L/2 + R_2 \rightarrow I_{ESFERA\ OCA} = (2/3)M_2R_2^2 + M_2(L/2 + R_2)^2$.
Assim: $I = (1/12)M_3L^2 + (2/5)M_1R_1^2 + M_1(L/2 + R_1)^2 + (2/3)M_2R_2^2 + M_2(L/2 + R_2)^2$.
Numericamente: $I = (1/12)(1)(0,5)^2 + (2/5)(2)(0,15)^2 + (2)(0,25+0,15)^2 + (2/3)(1)(0,1)^2 + (1)(0,25+0,1)^2 = \underline{I = 0,021 + 0,018 + 0,32 + 0,007 + 0,122 = 0,49\ Kg\ m^2}$

b) Como o movimento do corpo é uma rotação pura, usamos a $2^a$ lei de Newton para rotações:
$\tau_{RES} = \tau_1 + \tau_2 = I\alpha$. Pela regra da mão direita, ambos torques são perpendiculares à folha e apontam para fora. Então podemos somar os módulos e calcular a aceleração angular:
$\tau_1 = r_1F_1\cos 30° = (L/2 + R_1)F_1\cos 30° = (0,25 + 0,15)(10)(0,866) = 3,46\ Nm$
$\tau_2 = r_2F_2\cos 40° = (L/2 + R_2)F_2\cos 40° = (0,25 + 0,10)(20)(0,766) = 5,36\ Nm$
$\rightarrow (3,46 + 5,36) = I\alpha = 0,488\ \alpha \rightarrow \underline{\alpha = 8,82 / 0,488 = 18\ rad/s^2}$
O sentido da rotação resultante é ANTI-HORARIA (regra da mão direita para o torque)

c) O torque da força $F_2$ é perpendicular à folha e para fora, porém o torque da força $F_1$ é perpendicular à folha e para dentro. Queremos o ângulo θ para que o torque resultante seja nulo: $\tau_{RES} = (L/2 + R_2)F_2\cos 40° - (L/4)F_1\mathrm{sen}\theta = 0$ . Assim:
$(L/2 + R_2)F_2\cos 40° = (L/4)F_1\mathrm{sen}\theta \rightarrow (4)(1/2 + R_2/L)(F_2 / F_1)\cos 40° = \mathrm{sen}\theta \rightarrow$
$\mathrm{sen}\ \theta = 4(0,5 + 10/50)(10/30)\ (0,766) = 0,715 \rightarrow \underline{\theta = 45,6°}$

## $2^a$ Questão

(a) Momento de inércia da esfera: $I_e = 2/3.M.R^2 = 2/3.6.(0,25)^2 = 0,25\ Kg.m^2$
Velocidade da esfera após 2 segundos: $v = a\ t = 2,5\ .2 = 5,0\ m/s$
Energia cinética da esfera em rolamento sem deslizamento:
$K_c = ½\ M.v_{c.m.}^2 + ½\ I.\omega^2 = ½\ M.v_{c.m.}^2 + ½\ I.v^2/R^2 =$
$= ½\ .\ 6.5^2 + ½\ .\ 0.25\ .\ (5^2 / 0,25^2) = 75 + 50 \rightarrow K_c = 125JVe$
(b) Velocidade angular esfera após 2s:. $= \omega = v_{c.m} /R = 5/0,25 = 20\ rad/s$
$L_f = I\ \omega \rightarrow L_f = (0,25).20 \rightarrow L_f = 5\ Kg.m^2/s$
Como a esfera sobe a rampa realizando uma rotação no sentido horário, o vetor momento angular aponta no sentido negativo do eixo Z, de modo que: $\overrightarrow{L_f} = -5,0\ \mathrm{kg}\ m^2/s\ \hat{k}$

(c)

Rotação da roldana:

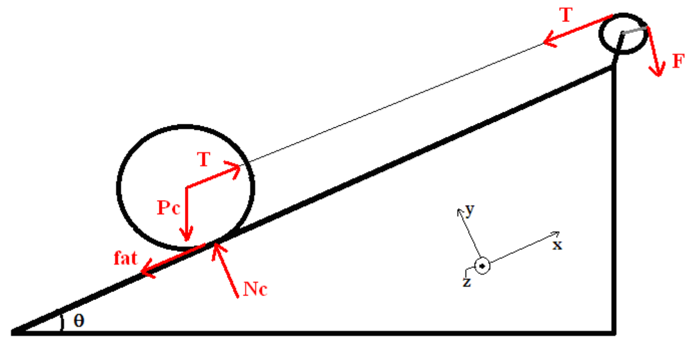
$\tau_R = I_r.\alpha_r \rightarrow r.F - r.T = (m.r^2/2).(a_{c.m.}/r) \rightarrow$

$F - T = m.a_{c.m.}/2$ (1)

Rotação da esfera:

$\tau_R = I_e.\alpha_e \rightarrow R.fat = (2/3.M.R^2).(a_{c.m.}/R) \rightarrow$

$fat = 2.M.a_{c.m}/3$ (2)




Translação do centro de massa da esfera:

i) na direção x: $F_{Rx} = M.a_x \rightarrow T - fat - P_c.sen\theta = M.a_{c.m.}$ (3)

ii) na direção y: $F_{Ry} = M.a_y \rightarrow N_c - P.cos\theta = 0 \rightarrow N_c = P_c.cos\theta$ (não é necessária)

(d) Somando as equações (1), (2) e (3):

$F - M.g.sen\theta = (m/2 + 2M/3 + M) .a_{c.m.} \rightarrow F = (4/2 +5.6/3).(2,5) + 6.10.(0,5) \rightarrow F = 30 + 30$
$\rightarrow F = 60N.$

**<u>3ª Questão</u>**

(a) O momento angular de uma partícula em relação a um determinado ponto de referência é:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Considerando os dois astronautas e o centro de rotação deles, o módulo do momento angular é portanto: $L = 2 . (d/2) . (Mv) . sen\ 90^o$ => $L = Mvd$

E também $\omega = v/(d/2) = 2v/d$

(b) Ao puxar a corda, a força exercida é radial e, uma vez que o sistema se encontra isolado, temos: $L_i = L_f$ . A distância entre os astronautas cai à metade, portanto cada um dista d/4 ao centro. Escrevendo o momento angular na forma $L_f = I_{tot}\ \omega = 2\ M\ (d/4)^2\ \omega_f$ temos:

$Mvd = 2\ M\ (d/4)^2\ \omega_f$ => $\omega_f = 8v/d$ ( e $v_f = 2v$)

O período é então $T = 2\pi / \omega$ => $T = \pi\ d / (4v)$

(c) Usando o teorema trabalho energia: $W = \Delta K = K_f - K_i = ½\ I_f\ \omega_f^2 - ½\ I_i\ \omega_i^2 =$
$= ½\ (2M)\ v_f^2 - ½\ (2M)\ v_i^2 = 4\ Mv^2 - Mv^2 = 3\ Mv^2$