PUC-RIO – CB-CTC

P4 DE ELETROMAGNETISMO – 29.06.11 – quarta-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:_____________________________________Turma:_______________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	2,5		
2ª Questão	2,5		
3ª Questão	2,5		
4ª Questão	2,5		
Total	10,0		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

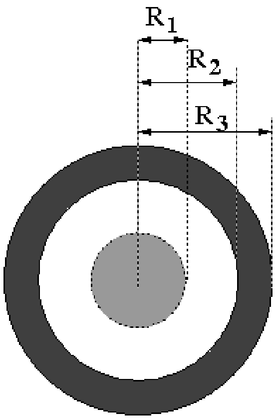
Formulário:

$\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ C^2 / (N\ m^2)$

$k = 9 \times 10^{9}\ N\ m^2 / C^2$

1ª Questão (2.5)

Uma esfera isolante de raio R_1 tem carga $+Q_0$ distribuída uniformemente em seu volume. Ao redor desta esfera e concêntrica a ela, se encontra uma casca esférica metálica de raio interno R_2 e raio externo R_3 (ver figura), com carga total $+Q_0$. A partir da Lei de Gauss, responda aos itens abaixo.



(a) (**1.8**) Encontre o campo elétrico nas seguintes regiões do espaço:

(i) $r \leq R_1$;
(ii) $R_1 < r \leq R_2$;
(iii) $R_2 < r \leq R_3$.

(b) (**0.7**) Encontre as densidades superficiais de carga na casca condutura.

SOLUÇÃO

a) Tomam-se esferas gaussianas concêntricas às esferas do problema

i) $r < R_1$ (dentro da esfera isolante) 0.2

0.7

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$; como $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ e $E = cte$ sador

$$\Rightarrow \quad E \int dA = EA = E \cdot 4\pi r^2 \; ; \quad q_{int} = Q_{TOT} \cdot \frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_1^3} = \frac{Q_0 r^3}{R_1^3}$$

daí: $$\vec{E} = \frac{Q_0 r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \hat{r}$$

0.5 ii) $R_1 < r < R_2$; continua valendo a condição do lado esquerdo da Lei de Gauss

agora $q_{int} = +Q_0$ $\Rightarrow$ $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$

0.4 iii) $R_2 < r < R_3$: dentro da casca condutora

$\vec{E} = 0$ dentro do condutor!

b) para garantir $\vec{E}=0$ dentro do condutor, deve-se ter tomando uma gaussiana c/ raio $R_2<r<R_3$

0,4 $q_{int}=0 \Rightarrow +Q_0 + Q_{(R_2)} = 0 \rightarrow Q_{(R_2)} = -Q_0$

portanto: $\sigma_{(R_2)} = \dfrac{-Q_0}{4\pi R_2^2}$

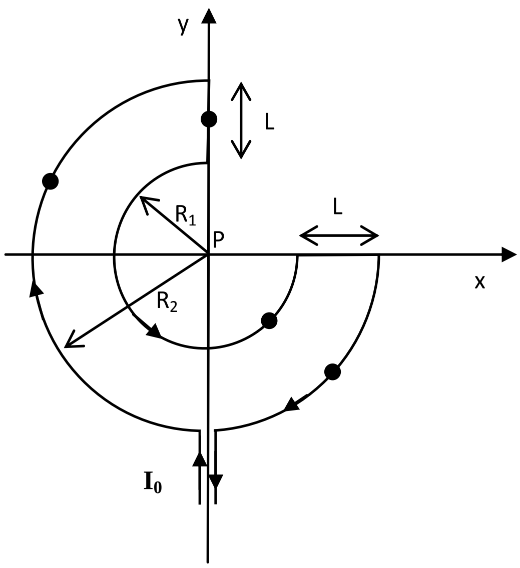
como a carga total da casca é $+Q_0$, havendo $-Q_0$

0,3 na superfície interior, o excesso migrará para a superfície externa $\Rightarrow \underbrace{Q_{(R_2)}}_{-Q_0} + Q_{(R_3)} = +Q_0 \Rightarrow Q_{(R_3)} = +2Q_0$

daí: $\sigma_{(R_3)} = \dfrac{+2Q_0}{4\pi R_3^2}$

2 Questão: (2.5)

Considere a espira condutora representada na figura abaixo localizada no plano *x*-*y* e percorrida por uma corrente de intensidade I_0. Os arcos de raios R_1 e R_2 ($R_2 = 2\,R_1$) formam um setor de ângulo $\theta = 3\pi/2$.

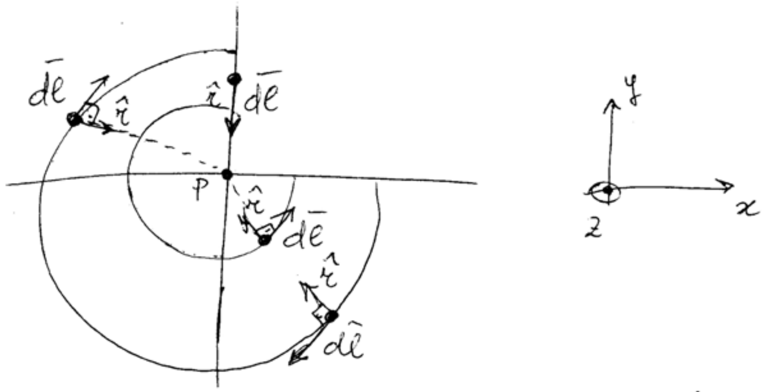


(a) (**0.5**) Há 4 pontos representados na espira. Sobre cada um deles **desenhe justificando** os vetores $d\vec{l}$ e $\hat{\boldsymbol{r}}$ relativos ao cálculo do campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ na origem (P) através da lei de Biot-Savart.

(b) (**1.0**) Calcule a contribuição ao campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ na origem (P) devido ao arco de raio R_1.

(c) (**1.0**) Calcule o campo magnético total $\vec{\boldsymbol{B}}$ em P. Justifique TODAS as suas afirmações.

SOLUÇÃO



De acordo com a lei de Biot-Savart:

a)
- $\bar{d\ell}$ são colocados na direção e sentido da corrente I_0
- $\hat{r}$ são colocados apontando na direção do ponto onde é calculado o campo magnético. Neste caso apontam para o centro P.

(b) Utilizando a lei de Biot-Savart teremos:

$$\bar{dB} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{\bar{d\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

→ para o arco de raio R_1, todos os $\bar{d\ell}$ estão a $\frac{\pi}{2}$ com relação ao $\hat{r}$.

→ Além disso pela regra da mão direita, o campo magnético no centro P devido ao arco R_1 terá direção e sentido $+\hat{z}$.

Portanto:

$$\bar{dB}_{R_1} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{d\ell}{r^2} \hat{z}$$

Para a contribuição total do arco R_1 no centro P teremos que integrar:

$$\bar{B}_{R_1} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int \frac{d\ell}{r^2} \right) \hat{z} \qquad \text{mas } d\ell = R_1 d\theta$$

$$\bar{B}_{R_1} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cancel{R_1} d\theta}{R_1^{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\cancel{\pi} R_1} \frac{3}{2}\cancel{\pi} \hat{z}$$

$$\boxed{\bar{B}_{R_1} = \frac{3\mu_0 I_0}{8 R_1} \hat{z}}$$

(c) Para o campo magnético total $\bar{B}$ em P teremos que:

- os segmentos de comprimento L não contribuem porque o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\hat{r}$ é zero (segmento vertical) ou é π (segmento ~~vertical~~ horiz.)

Para o arco de raio R_2 teremos que aplicar o mesmo raciocínio utilizado no item b) só que desta vez ~~o sentido~~ a direção e o sentido do campo devido a este arco será $-\hat{z}$.
Portanto:

$$\boxed{\bar{B}_{R_2} = -\frac{3\mu_0 I_0}{8 R_2}\hat{z}}$$

O campo total em P será portanto ($R_2 = 2R_1$):

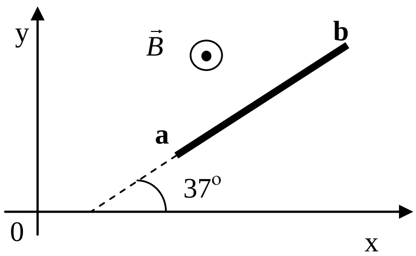
$$\bar{B} = \left(\frac{3\mu_0 I_0}{8R_1} - \frac{3\mu_0 I_0}{16R_1}\right)\hat{z}.$$

$$\boxed{\bar{B} = \frac{3}{16}\frac{\mu_0 I_0}{R_1}\hat{z}}$$

3ª Questão: (2.5)

Uma barra de 0,5 m de comprimento, posicionada no plano xy e fazendo um ângulo de 37° com o eixo x, se desloca com uma velocidade de v_0 = 2,5 m/s através de um campo magnético uniforme de módulo B = 2,0 T e direção e sentido +**k** (veja figura). Suponha as três situações abaixo (a), (b) e (c) em que a direção e sentido da velocidade da barra são dados.

a) $\vec{v} = v_0\,\hat{x}$
b) $\vec{v} = -v_0\,\hat{y}$
c) $\vec{v} = v_0\,\hat{z}$



$sen\,37^0 \cong \frac{3}{5}$ $\quad cos\,37^0 \cong \frac{4}{5}$

Em cada um destes casos, determine a f.e.m. induzida entre as extremidades da barra (**a** e **b**). Caso esta f.e.m. seja diferente de zero, identifique qual extremidade (**a** ou **b**) possui o potencial mais elevado.

<u>Nota</u>: Quando a barra se desloca ela varre uma área sobre a qual há um fluxo que varia à medida que a área aumenta. ***Sugestão***: Comece calculando o elemento $d\phi$ para um dado dA.

d) Em qual direção e sentido (vetor) a barra deve se mover para que a f.e.m. induzida seja máxima e tal que o potencial em b seja maior do que em a? Qual é o valor desta f.e.m. máxima?

SOLUÇÃO

a) Supondo um deslocamento dx teremos

$d\phi = B\,dS$ com $dS = B\,L\,dx$ sen 37^0.

Assim, $\varepsilon = -d\phi/dt = -BL$ sen $37^0\,dx/dt = -BLv_0$ sen $37^0 = -2{,}0\ .\ 0{,}5\ .\ 2{,}5\ .\ 3/5 = 1{,}5$ V.

Pela regra da mão direita, os elétrons livres da barra se deslocam para b. Então Va > Vb.

b) Supondo um deslocamento - dy teremos

$d\phi = B\,dS$ com $dS = B\,L\,dy \cos 37^0$.

Assim, $\varepsilon = -d\phi/dt = BL$ sen $37^0\,dy/dt = -BLv_0 \cos 37^0 = -2{,}0\ .0{,}5\ .\ 2{,}5\ .\ 4/5 = 2{,}0$ V

Pela regra da mão direita, os elétrons livres da barra se deslocam para b. Então Va > Vb.

c) Supondo um deslocamento dz, não teremos variação de fluxo, portanto $\varepsilon = 0$ V .

d) A f.e.m. induzida ε será máxima se dS for máxima, i.é., dS = L dr e como os elétrons livres se acumulam em "a" a direção de dr é noroeste, perpendicular à barra.

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} = \frac{dr}{dt}(-sen\,37^0\,\hat{x} + \cos 37^0\,\hat{y}) = v_0\left(-\frac{3}{5}\hat{x} + \frac{4}{5}\hat{y}\right) = 0{,}5\,(-3\hat{x} + 4\hat{y})\ \text{m/s}$$

$\varepsilon_{max} = -B\,L\,v_0 = 2{,}0\ .\ 0{,}5\ .\ 2{,}5 = 2{,}5$ V.

4ª Questão: (2.5)

Considere o circuito da Figura 1 onde $\varepsilon = 6$ V, C= 1 μF, $R_1 = 10^6\,\Omega$, $R_2 \cong 0$ e S é uma chave que alterna das posições 1 e 2 de forma cíclica, tal que a permanência em cada posição tem a duração de 1 segundo.

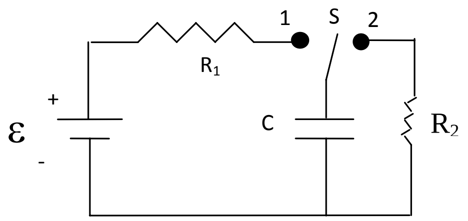


Figura 1

(a) (**0.7**) Esboce o gráfico <u>em escala</u> da variação da d.d.p. no capacitor com <u>dois ciclos</u> da chave S, indicando nos eixos os valores numéricos importantes. Considere $1/e \cong 1/3$.

No circuito da Figura 2 tem-se $\varepsilon = 8$ V, L= 0,01H, $R_2 = 1K\Omega$, $R_3 = 1\ K\Omega$ e as seguintes fases sucessivas:

- fase1: chave na posição 1 durante longo tempo
- fase2: chave na posição 2 durante longo tempo.

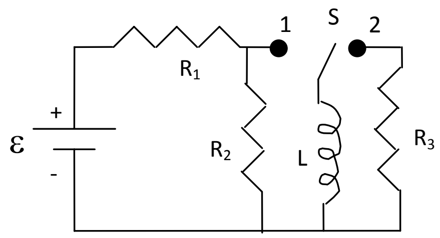


Figura 2

(b) (**0.5**) Determine R_1 tal que a d.d.p. em R_3 no <u>início da fase 2</u> seja igual a 80 V.

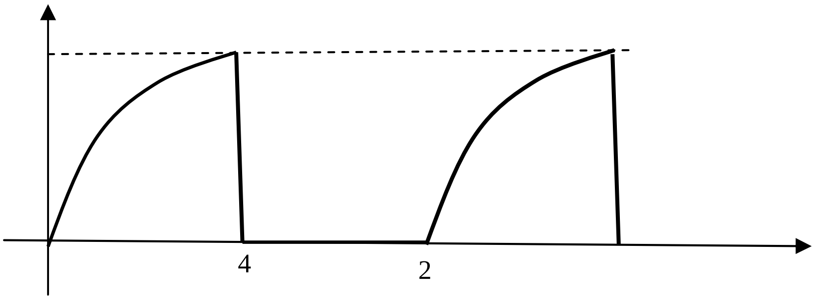
(c) (**0.5**) Com o valor de R_1 calcule a corrente fornecida pela bateria no início da fase 1.

(d) (**0.8**) Se o capacitor na Figura 1 e o indutor na Figura 2 fossem <u>plenamente energizados</u> nestes circuitos e depois conectados diretamente entre si, formando um circuito LC, então qual seria a frequência angular de oscilação e a amplitude da voltagem do capacitor após o sistema entrar em oscilação estável?

SOLUÇÃO

(a) S na posição 1: $V_C(t) = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau_C})$; t =1 s = τ_C = R_1 C $\Rightarrow$ V_C = 6(1-1/e) = **4 V**

S na posição 2 : $V_C(t) = 4e^{-t/\tau_C}$; τ_C= R_2 C $\cong$ 0 $\Rightarrow$ 1 / τ_C = ∞ $\Rightarrow$ $\mathbf{V_C \cong 0}$ nesta posição



(b) início da fase 2: V_3 =i(0) R_3 = 80 $\Rightarrow$ i(0) = 80/1 = 80 mA=0,08 A ; i(0) = corrente no final da fase 1 (<u>indutor como “curto”</u>) $\Rightarrow$ i(0) = $\varepsilon/R_1 \Rightarrow$ $\mathbf{R_1 = 8/0{,}08=100\Omega}$

(c) início da fase 1 : <u>indutor como ”aberto”</u> $\Rightarrow$ $\mathbf{i_{bateria} = 8/(R_1 + R_2) = 8/1{,}1}$ **mA**

(d) $w = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{,}01x10^{-6}}$ **= $\mathbf{10^4}$ rad/s**

C e L plenamente energizados $\Rightarrow$ U_{total} =1/2(C ε^2) + ½(L i^2) = ½(10^{-6}x6^2)+1/2(10^{-2}x$0{,}08^2$)

U_{total}= 5x10^{-5} J ; oscilação estável $\Rightarrow$ ½(CV^2) = 5x10^{-5} J $\Rightarrow$ **V = 10V**