PROVA G3 FIS 1026 – 15/06/2011

MECÂNICA NEWTONIANA B

NOME: Gabarito ________________________ Nº:__________

TURMA:________

QUESTÃO	VALOR	GRAU	REVISÃO
1	3,0		
2	4,0		
3	3,0		
TOTAL	10,0		

Dados:

$K = \frac{1}{2} m v^2$; $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$; $W_{cons} = -\Delta U$; $W_{mola} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$;

$W_{total} = \Delta K$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; $\mathbf{F}_{med} = \Delta\mathbf{P} / \Delta t$; $\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$; $M\mathbf{v}_{cm} = \sum \mathbf{p}_i$;

$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$; $\mathbf{R}_{cm} = \Sigma m_i \mathbf{r}_i / \Sigma m_i$; $\boldsymbol{\tau}_{res} = \Delta\mathbf{L} / \Delta t$;

$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v}$; $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}$; $L_{corpo\ rigido} = I\omega$; $dW_{total} = \tau(\theta)\,.\,d\theta$; $\sum \tau_{ext} = I\boldsymbol{\alpha}$;

Teorema dos eixos paralelos: $I_d = I_{CM} + M d^2$

Momentos de Inércia Rotacional:

Massa pontual: $I = MR^2$ Disco/Cilindro de massa M e raio R: $I_{CM} = MR^2/2$

Esfera de massa M e raio R: $I_{CM} = 2MR^2/5$ Aro de massa M e raio R: $I_{CM} = MR^2$

Haste de massa M e comprimento ℓ : $I_{CM} = M\ell^2/12$

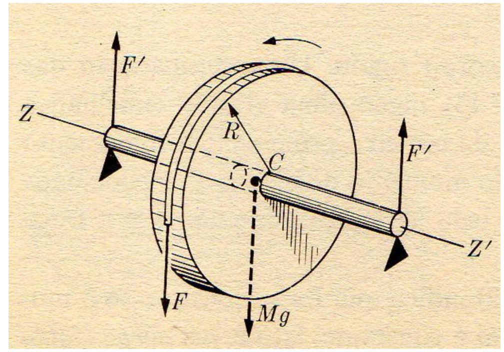
$\int A\theta^n\, d\theta = A\, \theta^{(n+1)} / (n+1)$

A duração da prova é de 1 hora e 50 minutos.

Respostas às questões sem justificativa não serão computadas.

Esta prova tem 4 folhas, contando com a capa. Confira.

(1ª questão: 3,0 pontos) Um disco com raio R = 0,50 m e massa M = 20 kg pode girar livremente em torno de um eixo horizontal fixo passando pelo seu centro. O eixo tem massa desprezível e o centro do disco é equidistante dos apoios do eixo. A partir do repouso, aplica-se uma força vertical F = 10 N que puxa um fio enrolado na borda do disco, conforme a figura. O fio é inextensível e de massa desprezível.



a) Calcular a aceleração angular do disco.

Torque = I α   só a força de 10 N provoca torque

$F R = ½ M R^2 α$

$α = 2 F / M R = 2\ 10 / (20 . 0{,}50) = 2$ rad / s^2

b) Calcular o valor das reações F' nos apoios.

$2 F´ – F – Mg = 0$

$F´= (F + Mg) / 2 = (10 + 20 . 10) /2 = 105$ N

Substitua agora a força de 10 N por um corpo de massa m = 1,0 kg para os itens seguintes. Utilize $g = 10\ m/s^2$.

c) Calcular a velocidade angular do disco após 2s.

Para o corpo $mg – T = m\ a = m\ α\ R$

para o disco $T\ R = I\ α$ $T = I\ α / R$

substituindo na primeira equação

$m\ g – (I\ α/ R) = m\ α\ R$ $α = m\ g / (m\ R + I/R) = m\ g / (m + M/2)R =$

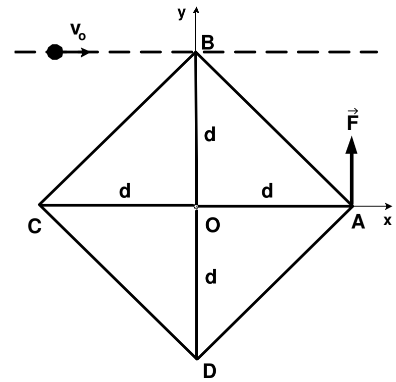
$= 1 . 10 / (1 + 20/2)\ 0{,}50 = 1{,}8$ rad/s^2

$w = α\ t = 1{,}8 . 2 = 3{,}6$ rad/s

d) Calcular a tensão no fio.

$T = m\ g – m\ α\ R = 1 .10 – 1 . 1{,}8 . 0{,}5 = 9{,}1$ N

(2ª questão: 4,0 pontos) A figura mostra a vista superior de um quadrado ABCD na horizontal preso a um eixo de rotação vertical que passa pelo ponto O nas extremidades das hastes OA, OB, OC e OD, todas de comprimento d em metros. Os lados do quadrado e as hastes são formados por fios finos e rígidos de massa m em kg. Uma força de módulo $F(\theta) = 1+ \theta\ (\pi/2 - \theta)$ N, onde θ é o ângulo medido no sentido anti-horário a partir do eixo +x, é aplicada perpendicularmente à haste OA durante $0 < \theta < \pi/2$ somente. A estrutura, inicialmente em repouso, passa a girar sem atrito no sentido anti-horário em torno do eixo.



a) Determine a velocidade angular ω da estrutura (quadrado e hastes) a partir do instante em que a força deixa de ser aplicada, supondo conhecidos seu momento de inércia I_o em relação ao eixo de rotação e os dados do cabeçalho.

Pelo Teor. Trabalho e Energia Cinética: $\Delta K = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = W_\tau = \int_0^{\pi/2} \tau d\theta = d \int_0^{\pi/2} F(\theta) d\theta$

$\frac{1}{2} I_o \omega^2 = d \int_0^{\pi/2} \left[\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 1\right] d\theta = d\left[\frac{\pi}{4}\theta^2 - \frac{\theta^3}{3} + \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = d\left(\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}217\ d$ J

Logo: $\omega = 2{,}106\sqrt{d/I_o}$ rad/s

b) Determine o momento de inércia I_o em relação ao eixo de rotação em função dos dados do cabeçalho.

Usando o Teorema dos Eixos Paralelos para um lado do quadrado e uma haste:

$I_{o,lado} = I_{CM,lado} + m\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{m(d\sqrt{2})^2}{12} + m\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{3} m d^2$ kg.m²

$I_{o,haste} = I_{CM,haste} + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{12} + \frac{md^2}{4} = \frac{1}{3} m d^2$ kg.m²

Logo: $I_o = 4(I_{o,lado} + I_{o,haste}) = 4\left(\frac{2}{3} m d^2 + \frac{1}{3} m d^2\right) = 4 m d^2$ kg.m²

c) Uma bola de argila de massa m em kg, que descreve a trajetória representada pela linha tracejada da figura com velocidade v_o constante, colide com um vértice do quadrado que passava pelo ponto (x = 0, y = d) e gruda nele. Calcule o vetor momento angular da bola de argila em relação ao centro do quadrado logo antes da colisão.

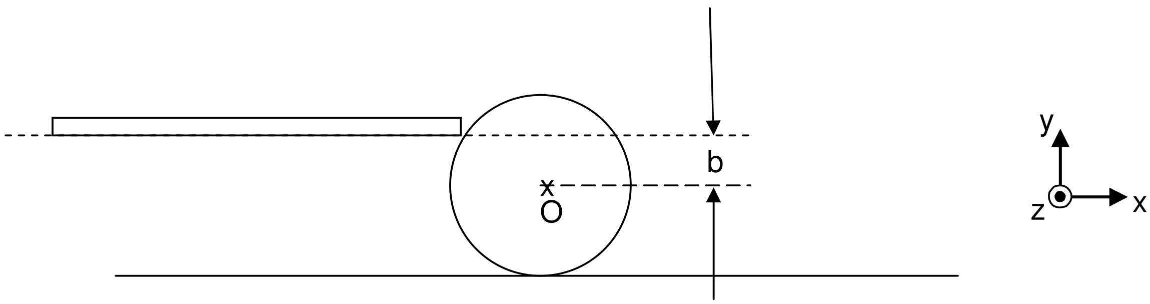
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = d\,\mathbf{i} \times m v_0\,\mathbf{j} = d\, m v_0\,(-\mathbf{k})$

d) Qual seria o valor de v_o necessário para trazer a nova estrutura (estrutura antiga e bola de argila) ao repouso logo após a colisão? Dê a resposta em função de m, ω, I_o e demais dados do cabeçalho.

Como não existe torque externo atuando sobre o sistema formado pela bola e pela estrutura, o momento angular total se conserva. Portanto: $L_{bola} + L_{estr} = 0 \rightarrow -d m v_o + I_o \omega = 0 \therefore$

$\therefore v_o = (I_o \omega)/(dm) = (4md^2\omega)/(dm) = 4d\omega$ m/s

(3ª questão: 3,0 pontos) Uma bola de bilhar de massa M e raio R é golpeada em repouso por um taco durante um intervalo de tempo Δt muito curto a uma distância vertical b do seu centro de massa, conforme ilustra a figura abaixo. Durante esse intervalo de tempo, age sobre a bola uma força impulsiva muito grande F, na direção x, que altera tanto o momento linear quanto o momento angular da bola de bilhar. O impulso inicial transmitido à bola pelo taco vale $F\Delta t = Mv_0$, onde v_0 é a velocidade do centro de massa da bola imediatamente após a tacada. Após a tacada a bola também adquire uma velocidade angular inicial.



a) Calcule o vetor torque produzido pela força F em relação ao eixo que passa pelo centro de massa da bola em função dos dados do problema.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (-R\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}) \times F\,\mathbf{x} = bF\,(-\mathbf{k})$$

b) Determine a variação do momento angular da bola em relação ao seu centro de massa em função dos dados do problema.

Durante a colisão a força impulsiva F aplica um torque em relação ao centro de massa da bola. Portanto, a variação do momento angular da bola de bilhar em relação ao seu centro de massa será em módulo

$$\Delta L = \tau^{ext}\,\Delta t = b\,F\,\Delta t = b\,M\,v_0$$

c) Calcule a velocidade angular inicial e determine o valor de b em função do raio R para que ocorra o rolamento sem deslizamento. (Sugestão: imponha a condição para o rolamento sem deslizamento).

$$\Delta L = b\,M\,v_0 = I_{cm}\omega_0 = 2/5\,M\,R^2\,\omega_0 \rightarrow \omega_0 = 5/2\,bV_0 / R^2$$

No rolamento sem deslizamento $v_0 = \omega_0 R \rightarrow b = 2R/5$.