PROVA G3 FIS 1026 – 30/11/2010

MECÂNICA NEWTONIANA B

NOME: Gabarito Nº:_________

TURMA:_______

QUESTÃO	VALOR	GRAU	REVISÃO
1	3,0		
2	4,0		
3	3,0		
TOTAL	10,0		

Dados:

$K = \frac{1}{2} m v^2$; $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$; $W_{cons} = -\Delta U$; $W_{mola} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$

$W_{total} = \Delta K$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; $\mathbf{F}_{med} = \Delta\mathbf{P} / \Delta t$; $\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$; $M\mathbf{v}_{cm} = \sum \mathbf{p}_i$;

$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$; $\mathbf{R}_{cm} = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$ $\boldsymbol{\tau}_{res} = d\mathbf{L} / dt$

$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, $L_{corpo\ rigido} = I\omega$, $W_{total} = \tau \cdot \Delta\theta$, $\sum \tau_{ext} = I\boldsymbol{\alpha}$

Teorema dos eixos paralelos: $I_d = I_{CM} + M d^2$

Momentos de Inérica Rotacional:

Massa pontual: $I = MR^2$ Disco/Cilindro de massa M e raio R: $I_{CM} = MR^2/2$

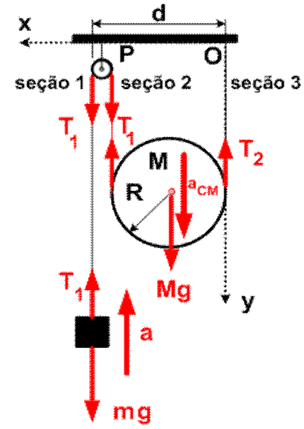
Esfera de massa M e raio R: $I_{CM} = 2MR^2/5$ Aro de massa M e raio R: $I_{CM} = MR^2$

Haste de massa M e comprimento ℓ : $I_{CM} = M\ell^2/12$

A duração da prova é de 1 hora e 50 minutos.

Respostas às questões sem justificativa não serão computadas.

Esta prova tem 4 folhas, contando com a capa. Confira.



(1ª questão: 3,0 pontos) Uma fita ideal (inextensível e de massa desprezível) tem uma extremidade presa ao teto de uma sala e passa, sucessivamente, por: (i) um cilindro de massa M e raio R; e (ii) uma polia ideal P (massa e raio desprezíveis). A extremidade livre da fita está presa a um corpo de massa m, conforme mostra a figura. Sabe-se que: (iii) a fita não desliza em relação ao cilindro e à polia; e (iv) o sistema formado pela fita, cilindro, polia e corpo é solto a partir do repouso. O eixo do cilindro não está fixo e pode transladar. Suponha M > m.

a) Represente na figura todas as forças que atuam sobre o corpo, sobre a polia e sobre o cilindro, indicando que trações nas seções 1, 2 e 3 da fita são iguais ou diferentes entre si.

b) Escreva todas as equações correspondentes à aplicação das Leis de Newton ao cilindro e ao corpo. Resolva o sistema resultante para determinar a aceleração do centro de massa do cilindro a_{CM} em função de M, R, m e g. Sabe-se que, em módulo, a aceleração do corpo é o dobro de a_{CM}.

Será suposto que o cilindro desce e o corpo sobe. Logo:

Corpo ($\Sigma F_y = ma$): $T_1 - mg = m\,a = 2\,m\,a_{CM}$ (1)

Cilindro ($\Sigma F_y = Ma_{CM}$): $Mg - T_1 - T_2 = M\,a_{CM}$ (2)

Cilindro ($\Sigma \tau_z = I_{CM}\,\alpha$): $-RT_1 + RT_2 = I_{CM}\alpha = I_{CM}\,a_{CM}/R = MR\,a_{CM}/2$ (3)

Somando-se 2(1)+(2)+(3)/R membro a membro, obtém-se:

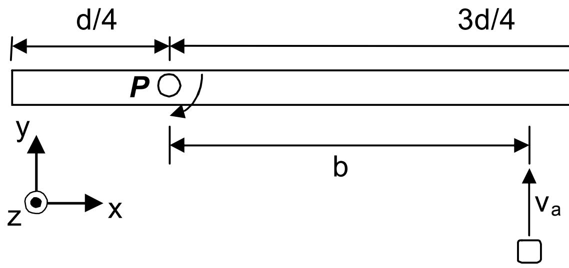
$(M - 2m)\,g = (4m + M + M/2)\,a_{CM}$ → $a_{CM} = \frac{2(M-2m)}{8m+3M}g$

c) Determine a expressão para o <u>vetor</u> momento angular do corpo (que sobe com velocidade v = at) em relação à origem O. Apresente a resposta em função de m, a, d e t. A partir deste resultado, determine o <u>vetor</u> torque da força resultante que atua sobre o corpo em função de m, a e d.

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = (d\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \times (-mat\hat{\jmath}) = -mdat\hat{k} \qquad (4)$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-mdat\hat{k}\right) = -mda\hat{k} \qquad (5)$$

(2ª questão: 4,0 pontos) A figura mostra uma barra delgada e homogênea de massa M = 3,0 kg e comprimento total d = 2,0 m. A barra está presa ao eixo P através de um pino em uma mesa horizontal com atrito desprezível. Inicialmente a barra gira livremente em torno de P com 3 rotações por minuto no sentido horário. Em dado instante, um pequeno objeto de massa m = 100 g se aproxima perpendicularmente à barra com uma velocidade constante v_a = 10,0 m/s a uma distância lateral b = 0,73 m do eixo P. A barra e o pequeno objeto se chocam exatamente quando a barra está paralela ao eixo x mostrado na figura.



a) Determine o momento de inércia da barra em torno do eixo P.

O momento de inércia dI para elemento de massa indicado na figura vale $dI = x^2.dm = \lambda.x^2.dx = M.x^2.dx / L$. O momento de inércia de toda barra fica determinado ao realizarmos a integral sendo que os limites de integração vão de $-d/4$ até $3d/4$.

$$I = \int dI = \frac{M}{d}\int_{-d/4}^{3d/4} x^2.dx = \frac{7}{48}Md^2.$$

Para $M = 3,0kg$ e $d = 2,0m$ encontramos $I = (7/4)kg.m^2$.

Obs: será aceita a solução usando o Teorema dos Eixos Paralelos

b) Determine para a barra e para o objeto, os <u>vetores</u> momento angular em torno do ponto P logo antes da colisão. Responda em função da velocidade angular ω_a (no sentido horário) e do momento de inércia I_p da barra, da velocidade v_a (no sentido +y) e da massa m do objeto e da distância b.

$\mathbf{L}_p^{barra} = I_p\,\omega_a\,(-\mathbf{k})$
$\mathbf{L}_p^{objeto} = b\,(\mathbf{i}) \times m\,v_a\,(\mathbf{j}) = mv_ab\,(\mathbf{k})$

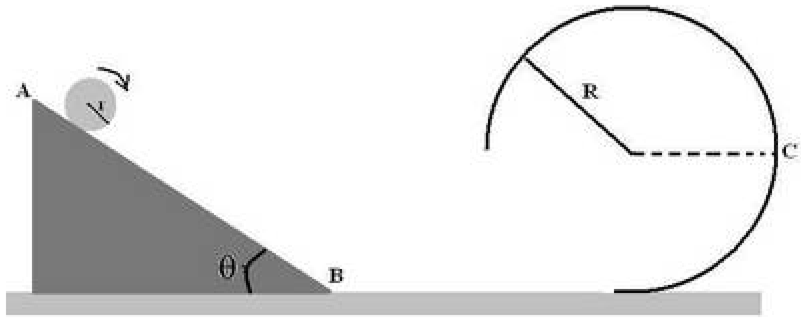
c) Sabendo que após a colisão a barra e o objeto permanecem juntos. Determine a velocidade angular e o sentido de rotação do conjunto após a colisão.

Como não existem torques externos o momento angular se conservar: $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_d$, ou seja, $mv_ab - I_p\,\omega_a = (I_p + mb^2)\,\omega_d \rightarrow \omega_d = (mv_ab - I_p\,\omega_a) / (I_p + mb^2)$ = 0,1 rad/s no sentido anti-horário.

d) Estabeleça uma condição para b, de forma que o movimento de rotação após a colisão seja no sentido horário. Responda em função da velocidade angular ω_a (no sentido horário) e do momento de inércia I_p da barra, da velocidade v_a (no sentido +y) e da massa m do objeto.

Para termos o momento angular no sentido horário: $mv_ab - I_p\,\omega_a < 0 \rightarrow b < I_p\,\omega_a / mv_a$

(3ª questão: 3,0 pontos) Uma bola de bilhar de massa M e raio r desce rolando sem deslizar uma rampa que faz ângulo θ com a horizontal conforme o desenho. A bola parte do repouso no ponto A, cuja altura é h_A em relação ao piso. Após passar pelo ponto B a bola sobe uma pista circular vertical de raio R (por dentro e rolando sem deslizar). A aceleração da gravidade é **g** e considere $h_A > R$.



a) Encontre o módulo da aceleração angular da bola de bilhar no trecho AB, em função dos dados fornecidos.

Sobre a bola agem 3 forças: o peso **P**, a normal **N** e o atrito estático $\mathbf{F_{at}}$. Usando um sistema de referencia com o eixo X paralelo ao plano inclinado, sentido positivo para baixo, as leis de Newton serão:
Para translação: $\mathbf{P + N + F_{at}} = Ma_{CM}$ .. Para rotação: $\boldsymbol{\tau_{At} + \tau_N + \tau_P = I\alpha}$
Por componentes: $N – P\cos\theta = 0$; $P\sin\theta - F_{at} = Ma_{CM}$; $F_{at}\, r = I\alpha$. Nesta última equação consideramos que o peso e a normal não produzem torque com respeito ao eixo passando no CM. Como a bola rola suavemente também é válida a relação $a_{CM} = \alpha r$.
Assim:
$F_{at} = I\alpha/r = (0{,}4)Mr\alpha = (0{,}4)Ma_{CM} \rightarrow P\text{sen}\theta - (0{,}4)Ma_{CM} = Ma_{CM} \rightarrow$
$P\text{sen}\theta = 1{,}4Ma_{CM} \rightarrow a_{CM} = (\boldsymbol{g}/1{,}4)\ \text{sen}\theta = (5\boldsymbol{g}/7)\ \text{sen}\theta \rightarrow$

$\alpha = a_{CM}/r = (5\boldsymbol{g}/7r)\ \text{sen}\theta$

b) Calcule a velocidade do centro de massa da bola quando ela chega ao ponto B.

Pelo teorema trabalho-energia $W_{Total} = \Delta K$. Neste caso a única força que faz trabalho é o peso. Então: $W_{Total} = M\boldsymbol{g}h_A$. Como a bola cai a partir do repouso $\Delta K = K_F = 0{,}5Mv_{CM}^2 + 0{,}5I\omega^2 = 0{,}5Mv_{CM}^2 + 0{,}5{*}0{,}4Mr^2{*}v_{CM}^2/r^2 = 0{,}7Mv_{CM}^2 \rightarrow \boldsymbol{g}h_A = 0{,}7v_{CM}^2 \rightarrow$
$v_{CM} = \sqrt{(10\boldsymbol{g}h_A/7)}$

c) Encontre o módulo da força Normal exercida pela pista circular sobre a bola no ponto C. A reta pontilhada que une o centro da pista circular ao ponto C está na direção horizontal.

No ponto C a força normal corresponde com a força centrípeta:
$N = MV_{CM}^2 / (R – r)$. Para calcular V_{CM}^2 usamos novamente o teorema trabalho-energia entre o ponto A e o ponto C: $M\boldsymbol{g}h_A – M\boldsymbol{g}R = 0{,}7MV_{CM}^2 \rightarrow$
$V_{CM}^2 = (10/7)\boldsymbol{g}(h_A – R)$. Então

$N = (10/7)Mg(h_A – R)/(R – r) = (10/7){*}P{*}(h_A – R)/(R – r)$