PROVA G3 FIS 1026 – 25/06/2009

MECÂNICA NEWTONIANA B

NOME:________________________________ Nº:_________

TURMA:_______

QUESTÃO	VALOR	GRAU	REVISÃO
1	3,0		
2	3,0		
3	2,0		
4	2,0		
TOTAL	10,0		

Dados:

$g = 10{,}0\ m/s^2 = 1000\ cm/s^2$

$K = \frac{1}{2} m v^2$; $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$; $W_{cons} = -\Delta U$; $W_{mola} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$

$W_{total} = \Delta K$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; $\mathbf{F}_{med} = \Delta\mathbf{P} / \Delta t$; $\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$; $M\mathbf{v}_{cm} = \sum \mathbf{p}_{i;}$

$\mathbf{R}_{cm} = \Sigma\, m_i\, \mathbf{r}_i / \Sigma\, m_i$

Col. elástica: $K_{1a} + K_{2a} = K_{1d} + K_{2d}$

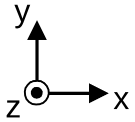
$K = \frac{1}{2} m v^2$, $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\tau = r F \operatorname{sen} \theta$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, $L_{corpo\ rigido} = I\omega$, $\sum\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$

$W_{total} = \tau \cdot \Delta\theta$

Teorema dos eixos paralelos: $I_z = I_{CM} + M d^2$

Sistema de coordenadas

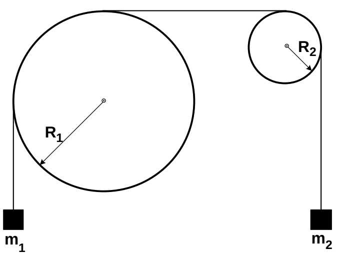


A duração da prova é de 1 hora e 50 minutos.

As respostas sem justificativas não serão computadas.

Esta prova tem 4 folhas, contando com a capa. Confira.

Questão 1 (3,0 pontos) - Os cilindros mostrados na Figura têm raios $R_1 = 0,2$ m e $R_2 = 0,1$ m, massas $M_1 = 2,0$ kg e $M_2 = 0,5$ kg e momentos de inércia em relação a seus centros de massa determinados pela relação geral $I_{CM} = MR^2/2$. Os cilindros são livres para girar em torno de eixos horizontais fixos, perpendiculares à Figura e que passam pelos respectivos centros de massa. O fio de massa desprezível passa sem deslizamento pelos cilindros e suas pontas livres estão presas a corpos de massas m_1 e $m_2 = 0,2$ kg, em repouso na mesma altura.



a) Sabe-se que o sistema (formado pelos cilindros, massa e fio) encontra-se em equilíbrio estático. Represente na Figura todas as forças internas e externas que atuam sobre o sistema. Determine os valores da massa m_1 e das trações nas três seções do fio. (1,0)

Corpo 1: $T_1 = m_1g$ Cilindro 1 ($\Sigma\tau_z = 0$): $R_1T_1 = R_1T_2$ Logo: $m_1g = T_1 = T_2 = T_3 = m_2g$

Corpo 2: $T_3 = m_2g$ Cilindro 2 ($\Sigma\tau_z = 0$): $R_2T_2 = R_2T_3$ $m_1 = m_2 = 0,2$ kg

$T_1 = T_2 = T_3 = 2$ N

Para os demais itens, suponha que os demais dados da introdução permaneçam válidos, mas que $m_1 = 0,4$ kg.

b) Determine os valores da aceleração dos dois corpos e das trações nas duas seções verticais do fio. (1,0)

Será suposto que o corpo 1 desce e o corpo 2 sobe (a aceleração *a* deve ser comum a ambos)

Corpo 1: $m_1g - T_1 = m_1a$ (1)

Corpo 2: $T_3 - m_2g = m_2a$ (2)

Cilindro 1 ($\Sigma\tau_z = I_1\alpha_1$): $R_1T_1 - R_1T_2 = I_1\alpha_1 = I_1a/R_1$ (3)

Cilindro 2 ($\Sigma\tau_z = I_2\alpha_2$): $R_2T_2 - R_2T_3 = I_2\alpha_2 = I_2a/R_2$ (4)

Somando-se (1)+(2)+(3)/R_1+(4)/R_2 membro a membro, obtém-se:

$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2 + M_1/2 + M_2/2)\, a \rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M_1/2 + M_2/2} g = \frac{0,2 \times 10}{1,85} = 1,081$ m/s^2

$T_1 = m_1 (g - a) = 0,4\,(10 - 1,081) = 3,57$ N

$T_3 = m_2 (g + a) = 0,2\,(10 + 1,081) = 2,22$ N

c) Determine os valores e sentidos das velocidades dos dois corpos quando o corpo de massa m_1 se desloca de $h_1 = 1$ m. (1,0)

A solução do item anterior confirma que o corpo 1 desce e o corpo 2 sobe (já que $m_1 > m_2$). O módulo *v* das velocidades deve ser comum a ambos:

$v^2 = 2\, a\, h_1 \rightarrow v = \sqrt{2ah_1} = \sqrt{2 \times 1,081 \times 1} = 1,47\ m/s$

Questão 2 (3,0 pontos) - Um inseto de massa m = 25 g e um disco uniforme situado no plano horizontal, de raio R = 15 cm, massa M = 200 g e momento de inércia $I_{CM} = MR^2/2$ em relação a seu centro de massa formam um sistema isolado. Inicialmente (t = 0 s), o disco gira no sentido anti-horário com velocidade angular ω_i = 33 1/3 rpm em torno de eixo vertical que passa pelo seu centro, que coincide com a origem do sistema de coordenadas e com a posição do inseto. Em seguida, o inseto se desloca no sentido da borda do disco com velocidade radial constante V = 1,5 cm/s.

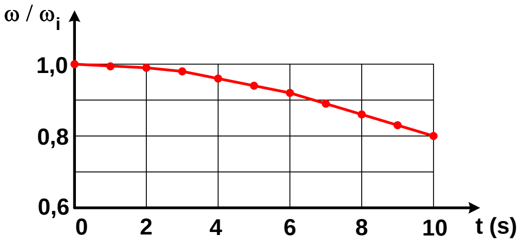
a) Determine uma expressão para a velocidade angular do sistema em função do tempo no intervalo $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ (1,0). Apresente o gráfico da expressão obtida no espaço abaixo. (0,5) (Sugestão: verifique se existe conservação de alguma grandeza física e a utilize, se for adequada)

Como $\Sigma\tau_z = 0 \rightarrow L_f = L_i = I_{CM}\,\omega_i$

Mas $L_f = (I_{CM} + m\,r^2)\,\omega = (I_{CM} + m\,V^2\,t^2)\,\omega$

Logo $(I_{CM} + m\,V^2\,t^2)\,\omega = I_{CM}\,\omega_i \rightarrow \frac{\omega}{\omega_i} = \frac{I_{CM}}{I_{CM} + mV^2t^2}$

Isto é, $\frac{\omega}{\omega_i} = \frac{I_{CM}}{I_{CM} + mV^2t^2} = \frac{1}{1 + \frac{2mV^2}{MR^2}t^2} = \frac{1}{1 + 0{,}0025\,t^2}$



Para os demais itens, suponha que os dados da introdução permaneçam válidos, mas que a velocidade angular do sistema seja $\omega = (1 - 0{,}2\,t^2)\,\omega_i$ no intervalo $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$.

b) Determine uma expressão, em função do tempo no intervalo $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, para a componente vertical do torque que atua sobre o disco, relativo ao eixo de rotação. (1,0)

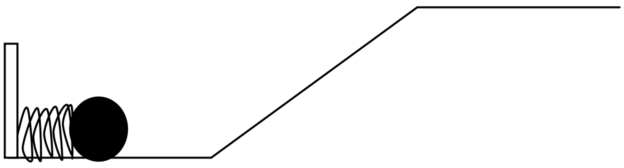
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{CM}\vec{\omega}) = I_{CM}\omega_i\frac{d}{dt}(1 - 0{,}2t^2)\hat{k} = -0{,}4 I_{CM}\omega_i t\hat{k}$$

c) Determine uma expressão, em função do tempo no intervalo $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, para a componente radial da força que atua sobre o inseto. (0,5)

$$F = ma_c = m\omega^2 r = m\,(1 - 0{,}2t^2)^2\omega_i^2 Vt = (m\,\omega_i^2 V)[t(1 - 0{,}2t^2)^2]$$

Questão 3 (2,0 pontos) - Um estudante projeta um sistema para transportar esferas maciças de massa M e raio R sem deslizar entre dois planos horizontais com diferentes alturas. O sistema é constituído de uma mola e um plano inclinado, conforme indica a figura abaixo. A mola possui constante elástica k, a altura entre os dois planos é h e a inclinação do plano inclinado vale θ. O momento de inércia das esferas vale $2MR^2/5$. A mola é comprimida de x e então é solta, sendo a compressão suficiente para a esfera atingir o plano superior e continuar se movendo.

a) Determine a velocidade do centro de massa da bola em posição arbitrária do plano horizontal inferior em que não há contato entre a mola e a bola, em função de k, x e M. (1,0)



$E_{mec\_ini}=E_{mec\_fin}$
$kx^2=mv^2+I\omega^2$ $\omega^2=V^2/R^2$
$kx^2=(I/R^2+m)v^2$ $kx^2=(2m/5+m)v^2$ $kx^2=(7m/5)v^2$
$V^2=5kx^2/7m$

b) Determine a velocidade do centro de massa da esfera no topo do plano inclinado, em função de k, x, M, g e h. (1,0)

$E_{mec\_ini}=E_{mec\_fin}$
$kx^2=2mgh+mv^2+I\omega^2$ $\omega^2=V^2/R^2$
$kx^2-2mgh=(I/R^2+m)v^2$ $kx^2-2mgh=(2m/5+m)v^2$ $kx^2-2mgh=(7m/5)v^2$
$V^2=5(kx^2-2mgh)/7m$

Questão 4 (2,0 pontos) – Uma barra delgada de comprimento D e massa m gira livremente no plano vertical em sentido horário ao redor de um eixo horizontal colocado em uma de suas extremidades. O momento de inércia de uma barra delgada em relação a eixo que passa pelo seu centro de massa vale $ML^2/12$. As respostas sem justificativas NÃO serão pontuadas.

a) Determine o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação. (0,25)

$I=I_{cm}+mh^2 \rightarrow I=MD^2/12+M(D/2)^2 \rightarrow I=MD^2/3$

b) Determine o vetor torque quando a barra encontra-se na horizontal e o eixo de rotação na sua extremidade esquerda. (0,5)

$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ $\boldsymbol{\tau}=(D/2)P\operatorname{sen}\theta\,(-\mathbf{k})$ $\rightarrow \boldsymbol{\tau}=DP/2\,(-\mathbf{k})$

c) Existem uma ou mais posições durante a rotação da barra em que o torque seja nulo? Se existirem, indique as posições. Justifique sua resposta. (0,75)

Sim, quando a barra encontra-se na vertical o torque é zero. Justificativa: Nestas posições o ângulo formado entre o vetor **r** e o vetor **P** é igual a zero. Desta forma: $\tau=(D/2)P\operatorname{sen}0^\circ$. , logo $\tau=0$.

d) O momento angular da barra se conserva durante toda a rotação? Justifique sua resposta. (0,5)

Não se conserva. $\boldsymbol{\tau}=d\mathbf{L}/dt$, como o torque é nulo quando a barra se encontra na vertical, e nas outras posições o módulo não é nulo. Se temos um torque diferente de zero, temos variação no momento angular.