

PUC-RIO – CB-CTC

P2 DE FIS1051 – ELETROMAGNETISMO – 18.10.11 – terça-feira

Nome : _____

Assinatura: _____

Matrícula: _____ Turma: _____

**NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS
E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.**

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	Valor	Grau	Revisão
1ª Questão			
2ª Questão			
3ª Questão			
Total	10,0		

**A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta
e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.**

Formulário:

Áreas: $4 \pi R^2$ (Esfera de raio R)
 $2 \pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

Volumes: $\frac{4}{3} \pi R^3$ (Esfera de raio R)
 $\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

Lei de Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

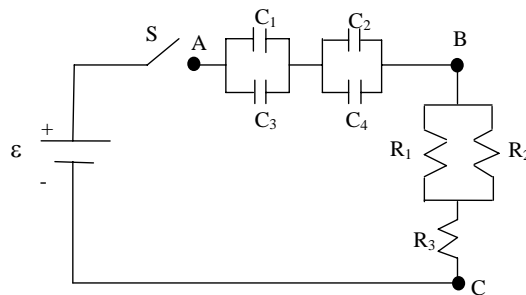
$$\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

1ª Questão: (3,5)

No circuito abaixo, têm-se $\varepsilon = 20 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 0,5 \text{ k}\Omega$ e $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1000 \text{ }\mu\text{F}$ capacitores de placas paralelas, inicialmente descarregados e cujos meios são o vácuo. Considere também neste circuito as seguintes fases sucessivas:

- **Fase 1:** chave S fechada durante longo tempo;
- **Fase 2:** a chave S é aberta e os meios dos capacitores substituídos por um isolante de constante dielétrica $\kappa = 4$;
- **Fase 3:** a chave S é fechada novamente durante longo tempo.



Determine, justificando todas as respostas:

- a) **(0.5)** A d.d.p. ($V_A - V_B$) em função do tempo durante a fase 1;
- b) **(0.5)** A d.d.p. ($V_B - V_C$) em função do tempo durante a fase 1;
- c) **(0.5)** A energia armazenada em cada capacitor no final da fase 1;
- d) **(0.5)** A energia fornecida pela bateria na fase 1;
- e) **(0.5)** A energia consumida pelo conjunto de resistores na fase 1;
- f) **(0.5)** A d.d.p. ($V_A - V_B$) no final da fase 2;
- g) **(0.5)** A corrente elétrica (intensidade e sentido) em R_3 no início da fase 3.

SOLUÇÃO

a) fase 1: carregamento dos capacitores $\Rightarrow (V_A - V_B)(t) = \varepsilon [1 - \exp(-t/\tau)] = 20[1 - \exp(-t)]$

$\tau = R_{eq} C_{eq} = 1 \text{ s}$; $C_{eq} = C_1 C_3 / (C_1 + C_3) + C_2 C_4 / (C_2 + C_4) = 10^{-3} \text{ F}$; $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3 = 10^3 \text{ }\Omega$

b) Lei das malhas $\Rightarrow (V_A - V_B) + (V_B - V_C) - \varepsilon = 0 \Rightarrow (V_B - V_C)(t) = 20 \exp(-t)$

c) Final da fase 1 $\Rightarrow V_A - V_B = 20 \text{ V} \Rightarrow U_C \text{ total} = \frac{1}{2} C_{eq} 20^2 = 0,2 \text{ J} \Rightarrow U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0,05 \text{ J}$

d) $U_{bat} = \int_0^{\infty} \varepsilon i dt = 0,4 \text{ J}$; $i(t) = (V_B - V_C) / R_{eq} = 0,020 \exp(-t) \text{ A}$

e) $U_R = U_{bat} - U_C \text{ total} = 0,4 - 0,2 = 0,2 \text{ J}$.

f)

fase 2: substituição do meio $\Rightarrow \varepsilon = \kappa \varepsilon_0 = 4\varepsilon_0 \Rightarrow C_1' = C_2' = C_3' = C_4' = 4 \times 10^{-3} \text{ F}$

$C_{eq}' = 4 C_{eq} = 4 \times 10^{-3} \text{ F}$

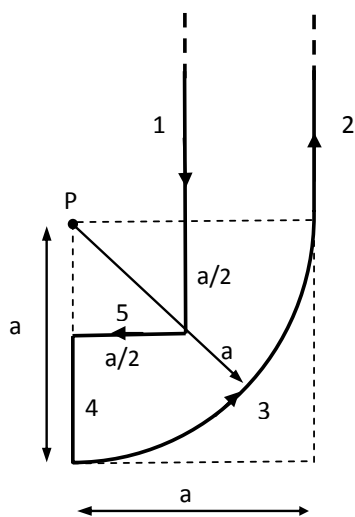
Conservação da carga:

carga em C_{eq} no final da fase 2 = carga em C_{eq} no final da fase 1 = $20 \times C_{eq} = 20 \times 10^{-3} = 0,02 \text{ C}$

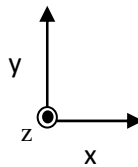
final da fase 2: $(V_A - V_B) = q / C_{eq} = 0,02 / 0,004 = 5 \text{ V}$

e) Lei das malhas $\Rightarrow (V_B - V_C) = \varepsilon - 5 = 15 \text{ V}$ no início da fase 3 $\Rightarrow i = 15/R_{eq} = 15 \text{ mA}$ com sentido horário.

2ª Questão: (3,5)



Um fio infinito conduzindo uma corrente i está dobrado conforme mostra a figura. Os trechos 1 e 2 são dois fios retílineos semi-infinitos paralelos, o trecho 3 corresponde a um arco circular de raio a que tem como centro o ponto P, e estão ligados com os trechos 4 e 5 (segmentos de reta).



Partindo explicitamente da lei de Biot-Savart e justificando todas as suas afirmações e cálculos, determine o campo magnético (módulo, direção e sentido) no ponto P devido:

- às correntes nos dois trechos retos 1 e 2;
- à corrente no trecho circular 3;
- à corrente no trecho 4;
- à corrente no trecho 5;

Solução

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

Consideramos o caso de um fio "finito".
 $d\vec{l} = dy \hat{y}$ $d\vec{y} \times \vec{r} = dy \sin\theta (-\hat{z})$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dy \sin\theta}{r^2} \quad \text{mas:}$$

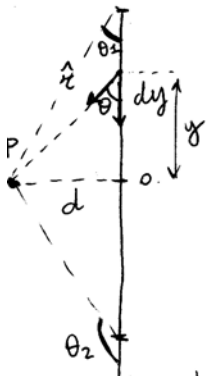
$$d = r \sin\theta \Rightarrow r = \frac{d}{\sin\theta}$$

$$y = -r \cos\theta \Rightarrow -\frac{d}{\sin\theta} \cos\theta = -\frac{d \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{\sin^2\theta} \Rightarrow dy = \frac{d}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d}{\sin^2\theta} d\theta \sin\theta \frac{\sin^2\theta}{d^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} [\cos\theta_1 - \cos\theta_2]$$



Trecho (1) : $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$; $d = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow |\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\cos 0 - \cos \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Pela regra da mão direita $\hat{B} = -\hat{z}$:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z}}$$

Trecho (2) : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$; $\theta_2 = \pi$; $d = a$ } (1,5)

$$|\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right] = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}$$

$$\hat{B}_2 = \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \hat{z}}$$

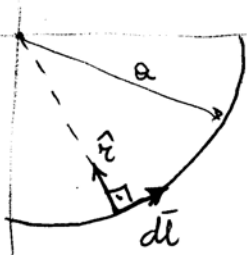
Para o trecho (5) : $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$; $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$; $d = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow |\vec{B}_5| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} ; \hat{B}_5 = -\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_5 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}} \quad (0,5)$$

O trecho (4) não contribui ao campo magnético em P porque $d\vec{l} \parallel \hat{r} \Rightarrow \sin \theta = 0$ no produto vetorial de Biot-Savart.
 $\boxed{\vec{B}_4 = \vec{0}}$ (0,5)

Para o trecho (3) : $|d\vec{B}_3| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{a^2}$ mas $dl = a d\theta$



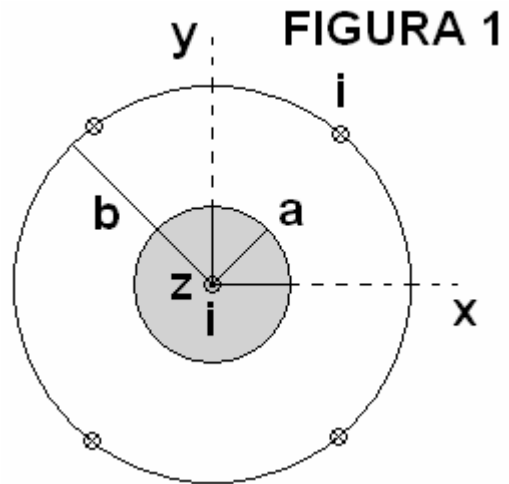
$$|d\vec{B}_3| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} a d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} d\theta$$

$$|\vec{B}_3| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 i}{8a}$$

$$\boxed{\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{8a} \hat{z}} \quad (1,0)$$

3ª Questão: (3,0)

O cabo coaxial **vertical** e infinito cuja seção transversal está mostrada na Figura 1 é formado por um cilindro interno de raio **a** e uma casca externa de raio **b**. As correntes totais **i** são uniformemente distribuídas no cilindro e na casca, com os sentidos **+z** e **-z**, respectivamente.



a) (1.0) Determinar o campo magnético $B(r)$, onde r é a distância do eixo z ao ponto de observação nos intervalos $a < r < b$ e $r > b$.

b) (1.0) Determinar o campo magnético $B(r)$, onde r é a distância do eixo z ao ponto de observação nos intervalos $r < a$.

Considere, agora, uma espira quadrada indeformável de lado $c < (b-a)$ colocada verticalmente no interior do cabo coaxial e percorrida pela corrente i , conforme mostra a Figura 2 (metade à direita do corte do cabo coaxial por um plano que contém o eixo z).

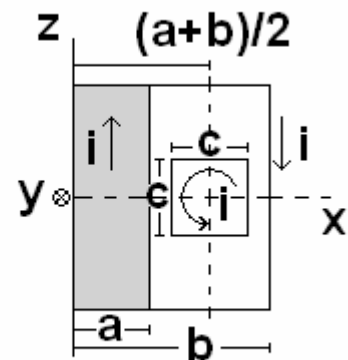


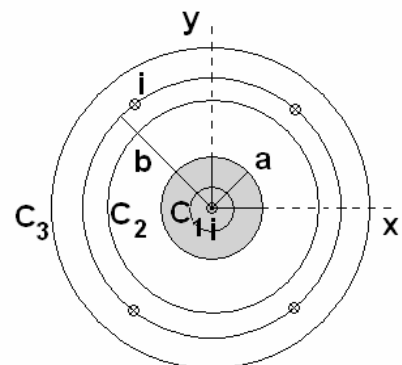
FIGURA 2

c) (1.0) Diga se, sob a ação exclusiva do campo magnético e imediatamente após ser solta a partir do repouso, a espira realiza movimento de translação ou rotação, indicando os sentidos correspondentes. Justifique sua resposta por intermédio de cálculos.

SOLUÇÃO

A lei de Ampère afirma que $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{env}$, onde C é um contorno Ampèreano arbitrário e i_{env} a corrente envolvida por C . Para qualquer dos três contornos Ampèreanos C_1 , C_2 ou C_3 incluídos na Figura 1, o campo magnético é **tangente ao contorno** e constante ao longo do mesmo. Logo, em todos os casos propostos, o lado esquerdo da lei de Ampère se reduz a

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B$ onde r é o raio correspondente.



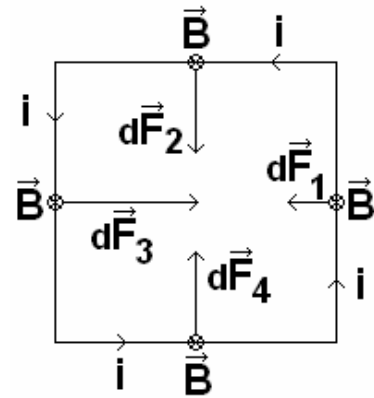
(a) Para $a < r < b \rightarrow i_{env} = i$. Logo, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. Para $r > b \rightarrow i_{env} = 0$. Logo, $B(r) = 0$.

(b) Para $r < a \rightarrow i_{env} = (\pi r^2) i / (\pi a^2)$. Logo, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r$.

(c)

A Figura ao lado mostra o sentido do campo magnético e da força $d\vec{F}_n = i d\vec{l} \times \vec{B}$ em cada braço n da espira. Cada ponto do braço 2 tem seu simétrico no braço 4 e, como as respectivas forças são opostas e têm o mesmo módulo, se cancelam. Por outro lado, de acordo com o resultado do item (a), tem-se

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 i}{\pi r} \frac{c}{a+b-c} \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 i}{\pi r} \frac{c}{a+b+c} \hat{x}.$$



Como $F_3 > F_1$, a espira, sob a ação exclusiva do campo magnético e imediatamente após ser solta a partir do repouso, realiza movimento de translação para a direita (sentido \hat{x}).