PUC-RIO – CB-CTC

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 12.09.11 – segunda-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,0		
3ª Questão	3,5		
Total	10,0		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \ \frac{N\,m^2}{C^2}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 12.09.11 – segunda-feira

1ª Questão: (3.5)

Cinco cargas de mesmo módulo Q (sendo 3 negativas e 2 positivas) estão distribuídas sobre cinco vértices de um hexágono de lado L (conforme a figura).

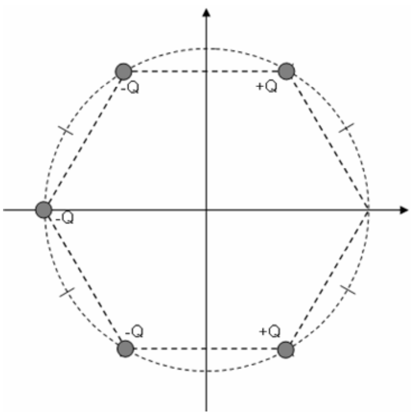
(a) (**1.0**) Calcule o vetor campo elétrico (módulo, direção e sentido) no centro do hexágono.

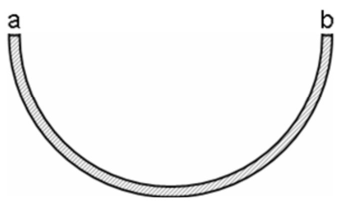
(b) (**0.5**) Qual é o trabalho realizado por um agente externo para trazer, sem aceleração, uma carga q_0 positiva do infinito até o centro do hexágono? (*Sugestão: utilize os conceitos de potencial elétrico*).

Seja agora o semicírculo mostrado na figura 2, que possui raio L e densidade de carga λ (λ>0) uniformemente distribuída. Sabendo que o módulo do campo elétrico no centro do semicírculo é dado pela equação $|E| = \dfrac{2k\lambda}{L}$, responda:

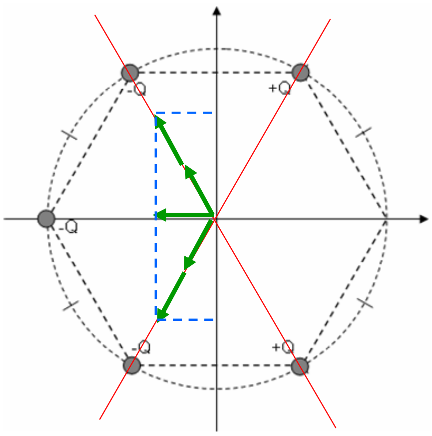
(c) (**1.0**) Como deve se posicionar este semicírculo sobre a figura 1 para que o campo elétrico resultante seja nulo? Desenhe o semicírculo em dita posição, junto com a figura 1, na folha de respostas. Justifique claramente a sua resposta.

(d) (**1.0**) Qual deve ser o valor da densidade de carga λ para que o campo seja nulo?





SOLUÇÃO



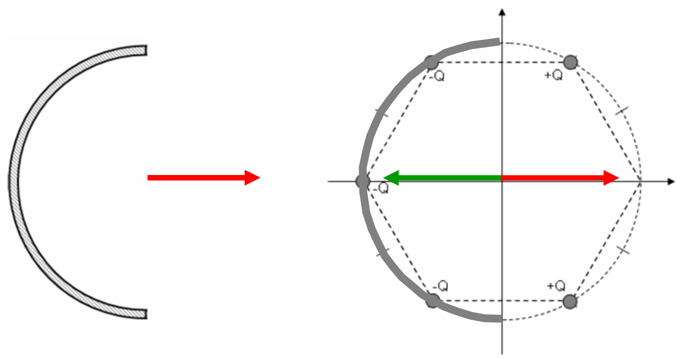
(a) Devido as condições de simetria da distribuição, temos que o campo elétrico resultante estará no sentido (-x). O eixo x é um eixo de simetria. Da mesma forma podemos afirmar que o campo elétrico na direção y é nulo pois o somatório das componentes E_y é nulo.

$$\sum_{i=1}^{5} E_{ix} = \left(\frac{-kQ}{L^2}\right) + 4\left(\frac{-kQ}{L^2}\cos 60^o\right) = \left(\frac{-kQ}{L^2}\right)\left(1 + 4\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 3\left(\frac{-kQ}{L^2}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{resultante}} = \frac{3kQ}{L^2}\,(-\hat{x})$$

(b) $W_{ext} = \Delta U = q_0.\ \Delta V = q_0.\ (Vf - Vi) = q_0.\ (-kQ/L)$

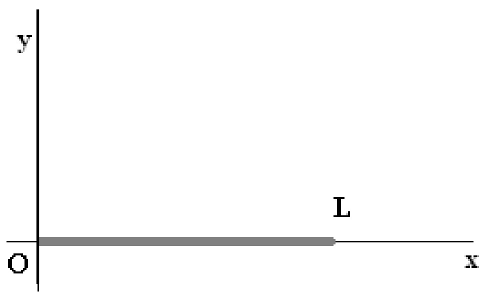
(c) O campo elétrico no centro do arco é no sentido de dentro para fora do arco, pois seu centro está no eixo de simetria do arco.



(d) $|E_{cargas}| = |E_{arco}| \quad \Rightarrow \quad (3kQ/L2) = (2k\lambda/L) \quad \Rightarrow \quad \lambda = (3Q/2L)$

2ª Questão: (3.0)

Um bastão delgado de comprimento L posicionado ao longo do eixo x, com uma de suas bordas na origem (figura ao lado), tem uma densidade linear de carga definida por $\boldsymbol{\lambda = \alpha x}$ $(0 \leq x \leq L)$ onde α é uma constante positiva e x é a distância a partir da origem. Considere que o potencial é nulo no infinito.



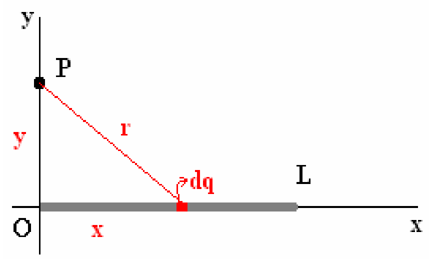
(a) (**1.5**) Encontre o potencial elétrico sobre um ponto P situado em uma posição genérica *y* sobre o eixo y, ou seja, P = (0, *y*).

(b) (**0.5**) Pode-se afirmar que em P o potencial é sempre positivo, sempre negativo, ou depende do valor de *y*? **Justifique as suas afirmações e/ou cálculos**.

(c) (**1.0**) A partir da resposta em (b), encontre a componente *y* do campo elétrico no ponto P.

SOLUÇÃO

(a)



$\lambda = q / L = dq / dx \rightarrow dq = (\alpha.x).dx$

(aqui considera-se dL = dx, pois a distribuição de cargas que geram o potencial elétrico encontra-se ao longo do eixo *x* no bastão)

$dV = (1/4\pi\varepsilon_0).dq / r$

$\rightarrow \int dV = \int[(1/4\pi\varepsilon_0).(\alpha.x)/(x^2 + y^2)^{1/2}]dx$

$\rightarrow V = (\alpha/4\pi\varepsilon_0).\int[x/(x^2 + y^2)^{1/2}]dx$

Tomando os limites de integração de 0 até L:

$\rightarrow V = (\alpha/4\pi\varepsilon_0).[(L^2 + y^2)^{+1/2} - |y|]$

(b) Devido à distribuição de cargas positivas no bastão e a partir do resultado para o potencial elétrico obtido no item **(a)**, onde $(L^2 + y^2)^{+1/2} > |y|$ tanto para valores de y positivos (acima do bastão) quanto negativos (abaixo do bastão), é possível afirmar que somente valores positivos do potencial elétrico são observados e apenas em regiões muito afastadas do bastão ($y \rightarrow \pm\infty$) o potencial é nulo.

(c) Para a componente vertical do campo elétrico:

$\rightarrow E_y = -\partial V/\partial y$

$\rightarrow E_y = -\partial \{(\alpha/4\pi\varepsilon_0).[(L^2 + y^2)^{+1/2} - |y|]\}/\partial y$

$\rightarrow E_y = -(\alpha/4\pi\varepsilon_0).\,\partial[(L^2 + y^2)^{+1/2} - |y|]/\partial y$

$\rightarrow E_y = (\alpha/4\pi\varepsilon_0).\,[\pm 1 - y/(L^2 + y^2)^{1/2}]$

3ª Questão: (3.5)

O gráfico abaixo mostra o valor do campo elétrico em função da distância radial de um conjunto formado <u>um condutor</u> e <u>um isolante</u>, concêntricos, dispostos no vácuo, tais que suas distribuições de carga respeitam simetria esférica. Observando o gráfico e <u>usando explicitamente a Lei de Gauss onde aplicável</u>, responda:

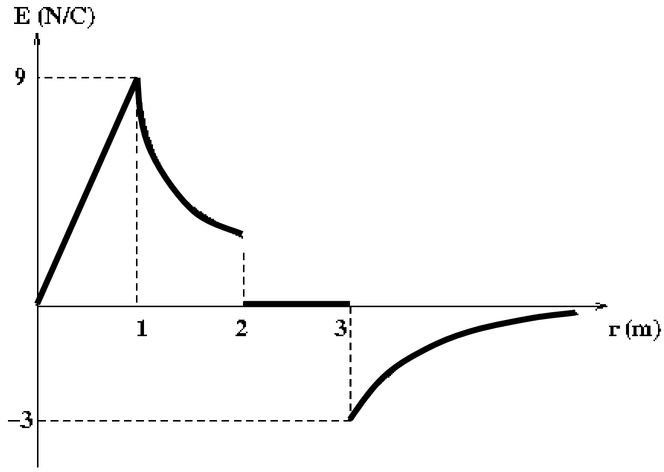
(a) (**0.5**) Em que região está o isolante? Em que região está o condutor?

(b) (**1.0**) Qual é a carga total do isolante?

(c) (**1.0**) A partir do gráfico, justifique por que se pode afirmar que a carga do isolante está distribuída uniformemente em seu volume e determine a sua densidade volumétrica de carga. (*Sugestão*: resolva o problema de uma distribuição esférica de carga uniforme).

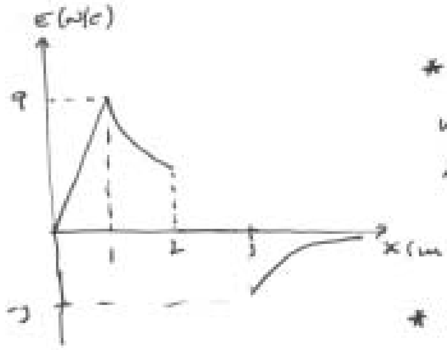
(d) (**1.0**) Qual é a carga total do condutor? Como ela está distribuída?

<u>**Justifique claramente todas as suas respostas.**</u>



SOLUÇÃO

(a)



* Claramente o condutor é uma casca esférica de raio interno 2m e externo 2m (região onde o campo elétrico é nulo)

* O isolante se encontra na região $r < 1m$, porque somente com cargas pode o campo crescer linearmente com a distância radial.

(b) Havendo simetria esférica, temos da lei de Gauss:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int}/\varepsilon_0$; com $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ e $|E|$ cte $\Rightarrow$ $E \cdot 4\pi r^2 = q_{int}/\varepsilon_0$

ou $E = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{K\, q_{int}}{r^2}$

Para $r = 1m$, toda a carga interna é a carga do isolante, então:

$E = 9\ N/c = \dfrac{\overset{9\times10^{+9}}{K}\ q_{isol}}{1} \Rightarrow \boxed{q_{isol} = 1nC}$

(c) Se $\rho =$ constante ; para r qualquer tal que $r \leq 1$:

$$E = \frac{K\, q_{int}}{r^2} \quad \text{(resolvido acima)} \Rightarrow q_{int} = \rho \cdot V_{int}$$

$$\Rightarrow q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \underline{K \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r} \Rightarrow \text{linear com } r$$

portanto ρ é constante!

$$\rho = \frac{Q_{ISOL}}{V_{ISOL}} = \frac{1\,nC}{\frac{4}{3}\pi (1)^3} = \frac{3}{4\pi}\ nC/m^3$$

(d) para $r = 3m$ vemos que $E = -3NK_e^{\ell}$ corresponde à carga total do condutor + isolante $\Rightarrow -3 = K \cdot \frac{Q_{Int}}{(3)^2}$

$\Rightarrow Q_{int} = -3\,nC \quad \therefore Q_{cond} = Q_{INT} - Q_{ISOL} = -3nC - 1nC \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Q_{cond} = -4nC}$ sendo $\begin{cases} -1nC & \text{em } r = 2m \\ -3nC & \text{em } r = 3m \end{cases}$ e