**PUC-RIO – CB-CTC**

**P3 DE ELETROMAGNETISMO – 17.11.10 – quarta-feira**

Nome :___________________________________________________________

Assinatura: ______________________________________________________

Matrícula:__________________________________Turma:______________

**<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>**

**<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>**

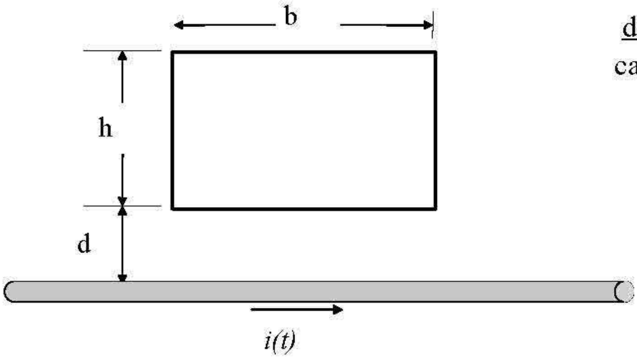
| **Questão** | **Valor** | **Grau** | **Revisão** |
|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 3,5 | | |
| 2ª Questão | 3,5 | | |
| 3ª Questão | 3,0 | | |
| Total | 10,0 | | |

**<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>**

**1ª Questão: (3.5)**

**Parte I**

A figura mostra um fio muito longo através do qual flui uma corrente que varia no tempo como $i(t) = \alpha - \beta\exp(-t/\tau)$, sendo $\alpha$, $\beta$ e $\tau$ constantes positivas, com $\alpha>\beta$. Uma espira retangular de base **b** e altura **h** é colocada a uma distância **d** do fio.




dado:
campo magnético de um fio infinito

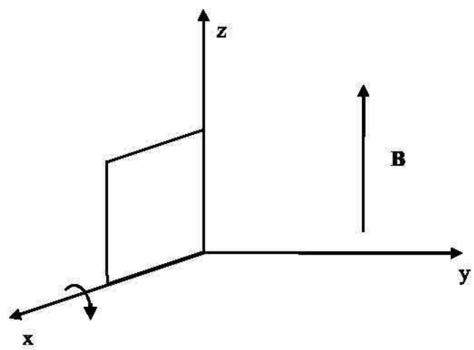
$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

(a) Calcule o fluxo magnético através da espira retagular, como função do tempo.

(b) Seja $R$ a resistência da espira. Utilizando a Lei de Faraday-Lenz, calcule a corrente induzida que flui na espira, em função do tempo. Determine seu sentido.

**Parte II**

A figura ao lado mostra uma espira quadrada de lado 0.1 $m$ livre para girar em torno do eixo **x** no sentido horário, conforme indicado. Nessa região do espaço existe um campo magnético constante, uniforme e paralelo ao eixo **z**, de módulo 0.4 T. Nesta situação, pela Lei de Faraday-Lenz, irá aparecer uma f.e.m. induzida na espira quadrada.

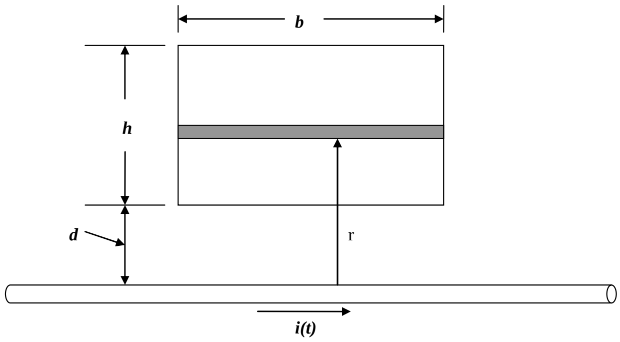



(a) Calcule a velocidade angular $\omega$ com a qual a espira deve girar de tal forma que f.e.m. máxima tenha valor unitário (no SI).

(b) Nos instantes de tempo em que a espira estiver no quadrante {y>0, z>0}, determine o sentido da corrente que flui no lado da espira sobre o eixo x. Justifique.

**SOLUÇÃO**

**Parte I**




(a) (**1,0**) O fluxo magnético no elemento de área indicado na figura acima é $d\Phi = b.B(r).dr$ , onde *B(r)* é o campo magnético gerado pela corrente que flui no fio no ponto *r* , que conforme o enunciado vale:

$$B(r) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi r}.$$

O fluxo total através da espira é obtido integrando $d\Phi$ de *d* até *d+h* :

$$\Phi = \frac{\mu_o b}{2\pi}\ln\left(\frac{h+d}{d}\right)\left(\alpha - \beta.e^{-t/\tau}\right).$$

(b) (**0,9**) De acordo com a lei de Lenz-Faraday a f.e.m induzida na espira será

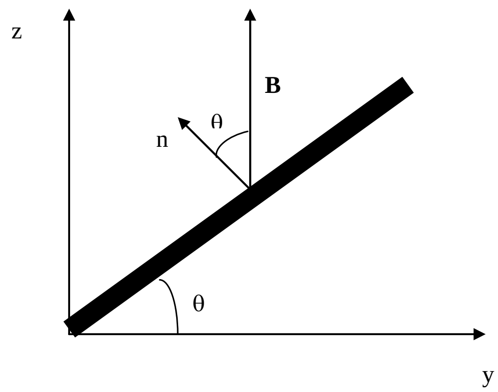
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\beta}{\tau}\right)\frac{\mu_o b}{2\pi}\ln\left(\frac{h+d}{d}\right)e^{-t/\tau}.$$

Portanto:

$$i(t) = -\frac{1}{R}\left(\frac{\beta}{\tau}\right)\frac{\mu_o b}{2\pi}\ln\left(\frac{h+d}{d}\right)e^{-t/\tau}$$

O fluxo magnético foi obtido no item anterior. Desde que $\alpha > \beta$ o fluxo está crescendo com o passar do tempo. De acordo com a lei de Lenz a corrente induzida na espira terá um sentido tal que o campo por ela criado se oporá a essa variação do fluxo magnético. Portanto, a corrente induzida na espira será no sentido horário.

## Parte II




(a) **(1,0)** O fluxo magnético através da espira é igual a área da espira vezes a projeção do campo magnético na direção do vetor normal à espira, isto é:

$$\Phi = B.\cos\theta.a^2.$$

A espira gira no sentido horário, portanto**,** $\theta = -\omega.t$ Logo:

$$\Phi(t) = B.\cos(-\omega.t).a^2.$$

A *f.e.m* induzida será

$$\varepsilon(t) = a^2.\omega.B.sen(\omega t)$$

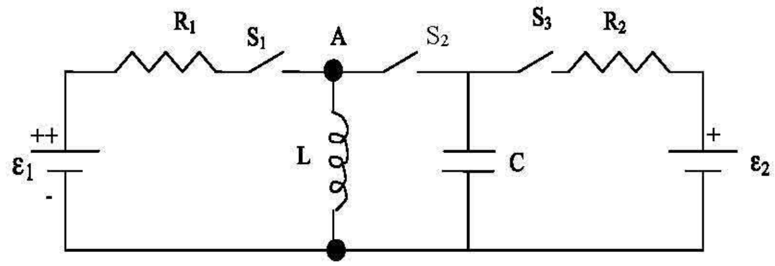
$\varepsilon_{\max} = \omega.B.a^2$ ocorre toda vez que $\omega.t = \pi/2$. Para que $\varepsilon_{\max} = 1V$ a velocidade angular deve valer:

$$\omega = \frac{1}{B.a^2} = \frac{1{,}0}{0{,}4.(0{,}1)^2} = 2{,}5x10^2\,rad/s.$$

(b) (**0,6**) Quando a espira está no quadrante $x, y, z > 0$ e se aproximando do plano $x - y$ o fluxo magnética através da espira está aumentando. De acordo com a lei de Lenz surgirá uma corrente na espira de tal forma que o campo magnético que essa corrente cria se opõe a variação do fluxo magnético. Então, a corrente que flui no pedaço da espira sobre o eixo $x$ será em direção a $x = 0$ (ou seja, na direção a $x < 0$. O sentido da corrente na espira é no sentido horário quando o observador está com os pés no plano $x - y$ e na cabeça no eixo $z > 0$).

**2ª Questão: (3.5)**

Considere o circuito da figura abaixo onde inicialmente não há carga em C e nem corrente em L e ocorrem as seguintes fases sucessivas:




**Fase 1**: chaves $S_1$ e $S_3$ fechadas e $S_2$ aberta durante longo tempo.

**Fase 2**: chaves $S_1$ e $S_3$ abertas e $S_2$ fechada durante longo tempo.

a) Explique o funcionamento do circuito durante a fase 1 (Justifique as suas afirmações).

b) Determine a carga no capacitor e a corrente no indutor no final da fase 1.

c) Por que o circuito é oscilante durante a fase 2 ?

d) Qual é a freqüência de oscilação do circuito na fase 2?

e) Considerando a conservação da energia, determine a intensidade máxima da corrente no indutor durante a fase 2.

f) Considerando a conservação da energia, determine a d.d.p. máxima entre os pontos A e B durante a fase 2.

g) Se na fase 2 fosse considerada uma resistência **r** em série com L (entre os pontos A e B) tal que representasse a resistência do fio, determine qual seria a energia total consumida por **r** .

## Solução

a) (**0.5**) Durante a fase 1 o capacitor é carregado, adquirindo no final uma carga máxima através do circuito $R_2$ C e a bateria $\varepsilon_2$. Nesta fase também o indutor é energizado com uma corrente máxima no final, através do circuito $R_1$ L e a bateria $\varepsilon_1$.

b) (**0.5**) Final da fase 1 : capacitor como " aberto" $\Rightarrow V_C$ máxima = $\varepsilon_2$ e $\mathbf{Q_{max} = \varepsilon_2\, C}$
e indutor como " curto" $\Rightarrow \mathbf{i_{max} = \varepsilon_1 / R_1}$.

c) (**0.5**) A chave $S_2$ fechada forma um circuito LC com ambos capacitor e indutor energizados na fase 1, consequentemente oscila sem amortecimento.

d ) (**0.5**) $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$

e) (**0.5**) Final da fase 1:

Energia armazenada em C : $U_c = ½\, (\varepsilon_2)^2\, C$

Energia armazenada em L: $U_L = ½\, L\, (\varepsilon_1 / R_1)^2$

Energia total armazenada = $U_{total} = ½\, (\varepsilon_2)^2\, C + ½\, L\, (\varepsilon_1 / R_1)^2$

Final da fase 2: $U_C$ max = $U_L$ max = $U_{total}$ = ½ $(\varepsilon_2)^2$ C + ½ L $(\varepsilon_1 / R_1)^2$

$U_L$ max = ½ L $(i_{max})^2$ = $U_{total}$ = ½ $(\varepsilon_2)^2$ C + ½ L $(\varepsilon_1 / R_1)^2 \Rightarrow i_{max} = \sqrt{\varepsilon_2^2 \frac{C}{L} + \frac{\varepsilon_1^2}{R_1^2}}$

f) (**0.5**) $V_{AB}$ máxima = $V_C$ máxima = $Q_{max}$ /C

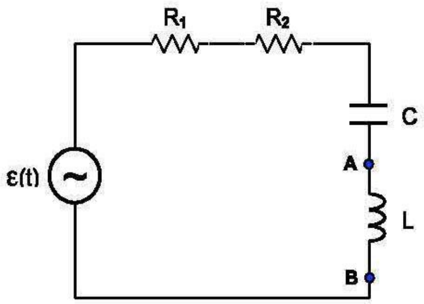
$U_C$ max = ½$(Q_{max})^2$/C = $U_{total}$ = ½ $(\varepsilon_2)^2$ C + ½ L $(\varepsilon_1 / R_1)^2 \Rightarrow Q_{max} = \sqrt{\varepsilon_2^2\ C^2 + LC\frac{\varepsilon_1^2}{R_1^2}}$

$V_{AB}$ máxima = $\sqrt{\varepsilon_2^2 + \frac{L}{C}\frac{\varepsilon_1^2}{R_1^2}}$

g) (**0.5**) Energia consumida = $(\varepsilon_2)^2$ C + ½ L $[\varepsilon_1 /(\mathbf{r} + R_1)]^2$

**3ª Questão: (3.0)**

No circuito em corrente alternada abaixo, a d.d.p. entre os pontos **A** e **B** é dada por




$$V_{AB}(t) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{[V]}$$

Sabe-se, além disto, que o <u>valor quadrático médio</u> da diferença de potencial em $\mathbf{R_1}$ é $V_{qm}(R_1)$ = 1 V. São conhecidos os valores dos seguintes componentes:

$R_1 = 10\Omega$

$C = 100\mu F$

$\varepsilon(t) = 3\,\text{sen}(\omega t)$ [V]

$\omega$ = 2000 rad/s

(a) Determine o valor da indutância **L**.

*(dica: lembre-se dos conceitos de reatância indutiva e capac*

(b) Determine o valor do resistor $\mathbf{R_2}$.

(c) Para que a corrente no resistor $\mathbf{R_1}$ esteja em fase com a força eletromotriz do gerador, é preciso aumentar, manter ou diminuir o valor de ω? Justifique as suas afirmações.

(d) Considerando que o valor de ω está de acordo com o item anterior, calcule a nova expressão da diferença de potencial $V_{AB}(t)$.

## SOLUÇÃO

(a) (**0.7**) O valor rms da corrente do circuito é

$$i^{rms} = \frac{\Delta v_{R1}^{rms}}{R1} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,\text{A}$$

Logo a amplitude da corrente é $i_m = 0{,}1\sqrt{2}$ A. A diferença de potencial no indutor é dada por:

$$\Delta v_{AB}(t) = i_m X_L \,\text{sen}\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparando com a expressão fornecida, vemos que

$$\begin{cases} i_m X_L = 2\sqrt{2} \\ \omega t - \phi + \dfrac{\pi}{2} = \omega t + \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos :

$$0{,}1\sqrt{2}\omega L = 2\sqrt{2} \Rightarrow L = \frac{2\sqrt{2}}{0{,}1\sqrt{2}\cdot 2000} = 10^{-2}\,\text{H (ou }\mathbf{10mH}\text{)}$$

(b) (**0.8**) Da segunda equação obtida acima, vemos que $\phi = \dfrac{\pi}{4}$. Portanto

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} \quad \Rightarrow \quad R = Z\cos\phi = \frac{\varepsilon_m}{i_m}\cos\phi$$

Substituindo $\varepsilon_m$ = 3V, $i_m$ = $0{,}1\sqrt{2}$ A e $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, obtemos

$$R = \frac{3}{0{,}1\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\Omega$$

Nesse circuito, R1 e R2 estão em série, logo

$$R = R1 + R2 \quad \Rightarrow \quad R2 = R - R1 = 15 - 10 = 5\Omega$$

(c) (**0.8**) Para que a diferença de fase entre a f.e.m. do gerador e a corrente seja zero, a reatância total do circuito deve ser nula; ou seja, a reatância capacitiva deve ser igual à reatância indutiva:

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}\cdot 100\cdot 10^{-6}}} = 1000\,\text{rad/s}$$

Logo a freqüência, que era 2000 rad/s, deve **diminuir** para 1000 rad/s.

**OBS**: não é necessário calcular a nova freqüência para resolver esse item; basta dizer que, como $\phi$ é positivo, o circuito possui características indutivas. Logo $\omega$ deve diminuir de forma que a reatância indutiva diminua (e a reatância capacitiva aumente).

(d) (**0.7**) A expressão genérica para a diferença de potencial no indutor é:

$$\Delta v_{AB}(t) = i_m X_L \,\mathrm{sen}\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Resta calcularmos os novos valores de $i_m$ e $X_L$.

Na situação do item anterior, temos Z = R = 15Ω. Portanto

$$Z = \frac{\varepsilon_m}{i_m} = R \quad \Rightarrow \quad i_m = \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{3}{15} = 0{,}2 \text{ A}$$

Além disso,

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 10^{-2} = 10\Omega$$

Substituindo na expressão os valores encontrados, além de $\phi = 0$ e $\omega = 1000$ rad/s, obtemos

$$\Delta v_{AB}(t) = 2\,\mathrm{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ [V]}$$