PUC-RIO – CB-CTC

P2 DE ELETROMAGNETISMO – 16.05.11 – segunda-feira

GABARITO

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:_________________________________Turma:_____________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,0		
3ª Questão	3,5		
Total	10,0		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

Formulário:

Volumes: $\frac{4}{3}\pi R^3$ (Esfera de raio R)

$\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

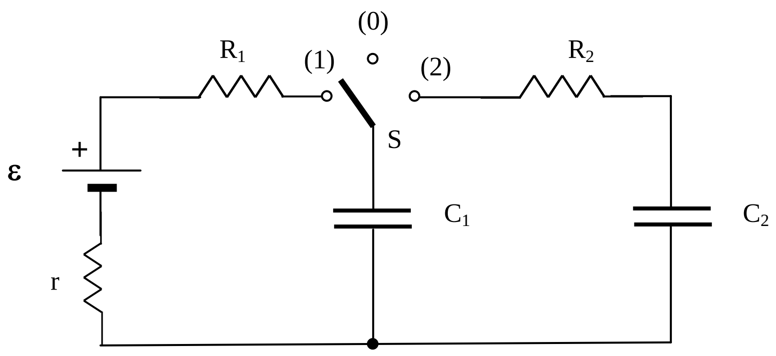
Áreas: $4\pi R^2$ (Esfera de raio R)

$2\pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

Lei de Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

1ª Questão: (3.0)

No circuito temos uma fonte com ε = 20 V e uma resistência interna r = 1 Ω. Os capacitores sem dielétrico são iguais e estão inicialmente descarregados. $C_1 = C_2 = 0{,}2$ μF, $R_1 = 9$ Ω e $R_2 = 4$ Ω.



a) (**1.0**) Ao ligarmos a chave S na posição (1), determine a corrente fornecida pela fonte em função do tempo.

b) (**0.8**) Se após um tempo muito longo mudarmos a chave S para a posição (0) e introduzirmos um dielétrico de constante k=5 no capacitor C_1, qual será a d.d.p. sobre este capacitor?

c) (**0.7**) Colocando finalmente a chave S na posição (2), qual é a corrente sobre R_2 em função do tempo?

d) (**1.0**) No equilíbrio final determine as cargas nos capacitores e a energia dissipada em forma de calor em R_2.

SOLUÇÃO

a) Chave em (1) temos um circuito RC série onde

$$i = I_m e^{-t/\tau}$$

$$I_m = \frac{\epsilon}{R+r} = \frac{20}{9+1} = 2\,[A] \quad \text{e} \quad \tau = (R+r)C_1 = (9+1)0{,}2\mu = 2\,[\mu s]$$

$$i = 2e^{-t/2x10^{-6}}\,[A]$$

b) Chave em (0) temos o capacitor C_1 carregado com carga:

$$Q = CV = C \in = 0{,}2\mu F\ 20V = 4\,[\mu C].$$

Introduzindo um dielétrico aumentamos a capacitância do capacitor para

$$C_1' = kC_1 = 5.0\ 0.2\,[\mu F] = 1\,\mu F$$

Como a carga é a mesma, teremos nova d.d.p. sobre o capacitor

$$V = \frac{Q}{C_1'} = \frac{4\mu}{1\mu} = 4\,[V]$$

c) Chave em (2) temos o capacitor C_1' funcionando como uma fonte de 4 V. Assim

$$i = I_m e^{-t/\tau}$$ como C_1' e C2 estão em série:

$$I_m = \frac{V}{R_2} = \frac{4}{4} = 1\,[A] \quad \text{e} \quad \tau = R_2 \frac{C_1' C_2}{C_1' + C_2} = 4\frac{1x0{,}2\mu\mu}{1\mu + 0{,}2\mu} = \frac{2}{3}\,[\mu s]$$

$$i = e^{-3t/2x10^{-6}}[A]$$

d) No equilíbrio teremos os dois capacitores sob a mesma ddp:

$$V_f = \frac{Q_1}{C_1'} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1' + C_2} = \frac{4\mu}{1{,}2\mu} = \frac{10}{3}$$

$$Q_1 = \frac{10}{3} C_1' = \frac{10}{3}\,[\mu C] \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{10}{3} C_2 = \frac{2}{3}\,[\mu C]$$

A energia dissipada no resistor R_2 pode ser calculada integrando a potência dissipada ou pela diferença entre as energias inicial e final.

$$U_{diss} = \int_0^{\infty} R_2 i^2 dt = \int_0^{\infty} 4e^{-3tx10^6} dt = \frac{4}{3}\,[\mu J]$$

Ou

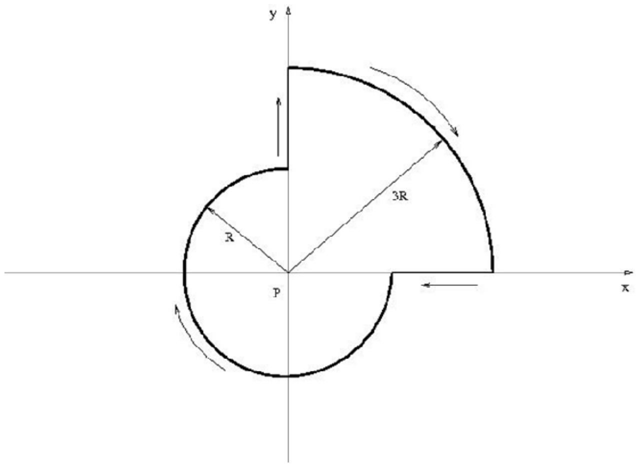
$$U_i = \frac{1}{2} C_1' V^2 = \frac{1}{2} 1\mu 4^2 = 8[\mu J]$$

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1'} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{0{,}2}\right] = \frac{50}{9}\mu + \frac{10}{9}\mu = \frac{20}{3}\,[\mu J]$$

$$U_{diss} = U_i - U_f = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}\,[\mu J]$$

2ª Questão: (3.0)

O circuito abaixo é formado por dois arcos de círculo de raios R e 3R e dois segmentos de reta de comprimento 2R. Há uma corrente ***i*** circulando no circuito no sentido indicado na figura.



Usando a lei de Biot-Savart calcule (**justificando TODAS as suas afirmações e cálculos**):

(a) (**0.5**) A contribuição dos segmentos retilíneos para o campo magnético no ponto P.

(b) (**1.0**) A contribuição do arco de círculo de raio R.

(c) (**1.0**) A contribuição do arco de círculo de raio $3R$.

(d) (**0.5**) O campo total no ponto P.

SOLUÇÃO

(a) As contribuições dos segmentos retilíneos para para o campo magnético no ponto P é zero, pois no trecho sob o eixo y o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\hat{r}$ é igual a π radianos, enquanto que no trecho sobre o eixo x esse ângulo vale 0 radianos. Portanto, em ambos os trechos $Id\vec{l}x\hat{r} = 0$.

(b) O ponto P corresponde ao centro do segmento de arco considerado. Portanto, $Id\vec{l}x\hat{r} = -Idl\hat{k} = -IRd\theta\hat{k}$, onde dl é o comprimento de um segmento infinitesimal de arco, valendo $dl = R.d\theta$ e $\hat{r}$ um versor com origem sobre o comprimento de arco infinitesimal que aponta em direção ao ponto P. A direção do campo será perpendicular ao plano do papel, penetrando-o (-**k**). O seu módulo será dado por:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|Id\vec{l}x\hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\theta}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\theta}{R}$$

$$B = \int dB = \left|\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{2\pi}^{\pi/2} d\theta\right| = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

(c) O raciocínio é o mesmo. O campo magnético é perpendicular ao plano do papel penetrando-o (-**k**) e o seu módulo vale:

$$B = \int dB = \left|\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(3R)}\int_{\pi/2}^{0} d\theta\right| = \frac{\mu_0 I}{24R}$$

(d) O campo magnético total vale (direção e sentido –**k**):

$$B_{total} = \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{24R} = \frac{5}{12}\frac{\mu_0 I}{R}$$

3ª Questão: (3.5)

PARTE 1

Em um longo fio condutor de raio R (chamado fio 1), paralelo ao eixo z, passa uma corrente elétrica de valor I_1 no sentido de z positivo (ver figura), uniformemente distribuída através da seção reta do fio.

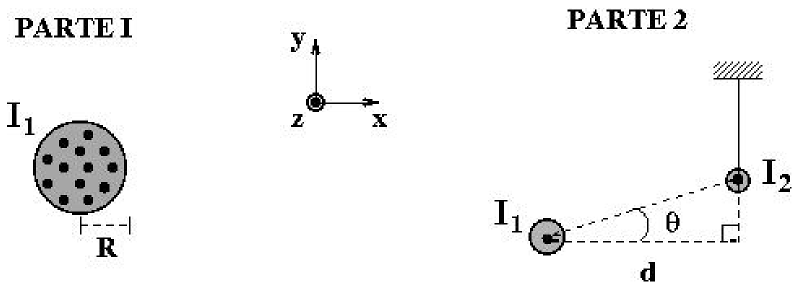
a) (**1.5**) Calcule o vetor campo magnético $\mathbf{B_1}$ gerado pelo fio 1 em qualquer ponto do espaço (dentro e fora do fio).

b) (**1.0**) Encontre para quais distâncias r em relação ao eixo do fio 1 o módulo do campo magnético é a metade de seu valor máximo.

PARTE 2

Considere agora um outro fio (fio 2), finito de tamanho L, que tem corrente I_2 também no sentido de z positivo. Este fio é, num determinado instante, colocado sustentado por uma fina corda no eixo vertical e se encontra posicionado em relação ao fio 1 tal como mostrado na figura. Nesta disposição, determine:

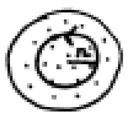
c) (**1.0**) A força magnética (vetor!) sofrida pelo fio 2 devido ao fio 1. Mostre, em um desenho, a direção e o sentido do campo magnético e da força magnética sobre o fio 2.



SOLUÇÃO

a) [1.5]

$r \leq R$: Dentro do fio



$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{env}$

$\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$; $B = B(r) \Rightarrow$

$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_1 \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\hat{\phi}$

(tangencial, sentido anti-horário)

$r > R$: Fora do fio

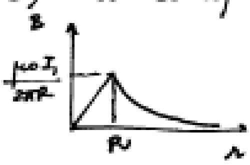
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{env}$

$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_1$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\phi}$

(tangencial, sentido anti-horário)

b) [1.0] O campo é máximo para $r = R$ e tem valor



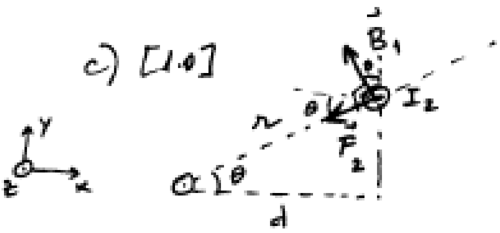
$B_{max} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$

Isto quer dizer que pode haver valores de r tanto dentro quanto fora do fio para os quais $B = B_{max}/2$

dentro do fio: $\frac{\mu_0 I_1 r}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}\overbrace{\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}}^{B_{max}} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$

fora do fio: $\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \Rightarrow r = 2R$

c) [1.0]



$\rightarrow$ em I_2, o campo devido ao fio 1

é: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\left(\cos\theta\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{x}\right)$

$$\vec{F}_2 = I_2\,\vec{L}\times\vec{B}_1 = I_2 L\,\hat{z}\times\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right)\left(\cos\theta\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{x}\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{I_2 L\,\mu_0 I_1}{2\pi r}\left(\cos\theta\,(\hat{z}\times\hat{y}) - \sin\theta\,(\hat{z}\times\hat{x})\right)$$

mas $r = d/\cos\theta$ $\rightarrow$ $\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L\cos\theta}{2\pi d}\left(-\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{y}\right)$