PUC-RIO – CB-CTC

P4 DE ELETROMAGNETISMO – 05.07.10 – segunda-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,0		
3ª Questão	3,5		
Total	10,0		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário:

<u>Volumes</u>: $\frac{4}{3}\pi R^3$ (Esfera de raio R)

$\pi R^2 L$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

<u>Superfícies</u>: $4\pi R^2$ (Esfera de raio R)

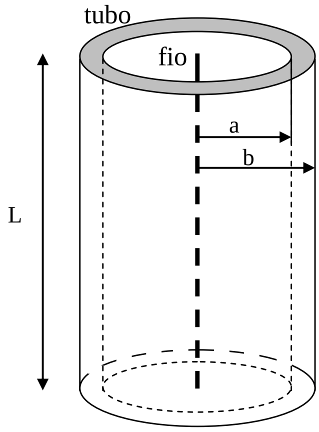
$2\pi RL$ (Cilindro de raio R e comprimento L)

$\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ C^2 / (N\ m^2)$

$k = 9 \times 10^9\ N\ m^2 / C^2$

1ª Questão: (3,5)

A figura ao lado representa um fio reto muito longo, com comprimento L e raio desprezível, onde há uma carga total **+Q** uniformemente distribuída. Ao redor do fio, há um tubo **condutor**, com eixo coincidente ao fio, com mesmo comprimento L, com raio interno **a** e raio externo **b**, e carga total **-2Q**.



Sendo r a distância radial de um ponto genérico ao fio, calcule o vetor campo elétrico nas regiões:

(a) $r < a$;

(b) $a < r < b$;

(c) $r > b$.

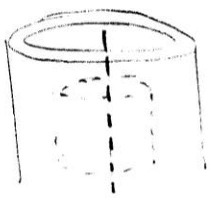
Suponha agora que uma carga pontual de valor **+Q** seja colocada em r = **2b**. Calcule o trabalho realizado pelo campo elétrico do conjunto "tubo+fio" ao mover a carga de uma distância total **b** nos seguintes casos:

(d) a carga se move paralela ao eixo do fio;

(e) a carga se move radialmente em direção ao tubo.

Solução

1ª QUESTÃO



a) $r < a$ (1,0)

Usando superfície gaussiana cilíndrica: raio r, altura h

$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = q_{int}/\varepsilon_0$ $(\vec{E} \perp d\vec{A})$

$q_{int} = \lambda \cdot h = \frac{+Q}{L} \cdot h$; $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \underbrace{\int \vec{E}\, d\vec{A}}_{tampas}^{0} + \int_{lateral} \vec{E}\, d\vec{A}$

$\int_{lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} \overset{\vec{E} \parallel d\vec{A}}{=} \int E\, dA$; $E(r)$ por simetria, portanto:

$\int E\, dA = E \cdot 2\pi r h \rightarrow E \cdot 2\pi r \cancel{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 L} \cancel{h}$

$\vec{E}$ é radial $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L r} \hat{r}}$

(0,7) b) $a < r < b$ $\longrightarrow$ região dentro do condutor $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

(0,8) c) $r > b$ $\longrightarrow$ $q_{int} = +Q - 2Q = -Q$

o desenvolvimento é análogo ao item (a), portanto

$\boxed{\vec{E} = \frac{-Q}{2\pi \varepsilon_0 L r} \hat{r}}$

(0,5) d) em $r = 2b$ há carga $+Q$.

$$\vec{F}_{el} = +Q\vec{E} = -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 L r}\,\hat{r}$$

se deslocamento é $\perp$ a $\hat{r}$ $\Rightarrow$ $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$.

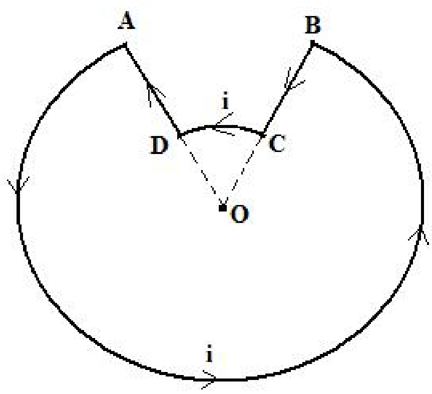
(0,5) e) deslocamento radial $\rightarrow$ $W \neq 0$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{2b}^{b} -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 L r}\,dr = -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{2b}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln 2}$$

2ª Questão: (3,0)

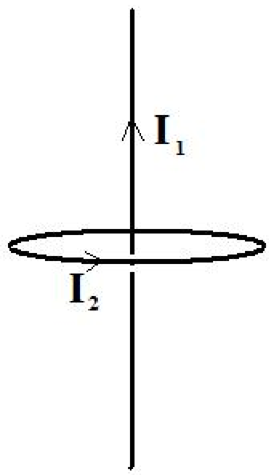
Na figura um circuito é formado por 4 trechos, dois deles são parte de círculos e dois são pedaços retos. Neste circuito: OB = OA = b e OC = OD = a. O arco AOB é igual a $\boldsymbol{\pi/6}$. As setas indicam o sentido da corrente $\boldsymbol{i}$ no circuito. Suponha que o eixo Z é perpendicular ao plano do circuito e está saindo.



Usando a Lei de Biot-Savart calcule o campo magnético **B** (**modulo, direção e sentido**) no ponto O:

a) Devido ao trecho AB.
b) Devido aos trechos retos BC e DA.
c) Devido ao trecho CD.
d) Devido a todo o circuito.

Considere agora a figura ao lado, onde um fio reto infinito tem uma corrente I_1 e um circuito circular concêntrico ao fio tem uma corrente I_2, com os sentidos das correntes indicados na figura:



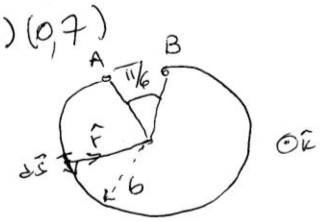
e) Num ponto genérico sobre o fio percorrido por I_1, <u>desenhe a direção e o sentido</u> do campo magnético $\mathbf{B_2}$ devido à corrente I_2.

f) Num ponto genérico sobre o fio percorrido por I_2 <u>desenhe a direção e o sentido</u> do campo magnético $\mathbf{B_1}$ devido à corrente I_1 .

g) Encontre o valor da força magnética que o fio percorrido por I_1 exerce sobre o fio percorrido por I_2.

Solução

2a) (0,7)



Lei de Biot-Savart $\quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

$d\vec{s} \times \hat{r} = +\hat{k}$ e $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds = r\,d\theta = b\,d\theta$

$$\Rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{b\,d\theta}{b^2} (+\hat{k}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} d\theta\, (+\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_{AB} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}(+\hat{k}) \int d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}(+\hat{k}) (\text{Arco } \widehat{AB})$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi b}(+\hat{k}) \left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\mu_0 i \, 11}{24 b}(+\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_{AB} = \frac{11}{24} \cdot \frac{\mu_0 i}{b} (+\hat{k})$$

2b) (0,3) Nos trechos $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$: $d\vec{s} \times \hat{r} = \vec{0}$

pois $d\vec{s} \parallel \hat{r} \Rightarrow \vec{B}_{BC} = \vec{B}_{DA} = \vec{0}$

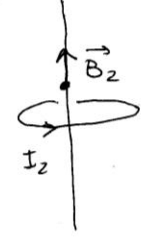
2c) (0,7) Usando o resultado do item a) com $r = a$

$$\vec{B}_{CD} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}(+\hat{k}) (\text{Arco } \widehat{CD}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}(+\hat{k}) \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

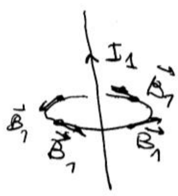
$$\vec{B}_{CD} = \frac{1}{24} \cdot \frac{\mu_0 i}{a} (+\hat{k})$$

2d) (0,3) $\vec{B}_o = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA} = \frac{1}{24} \cdot \mu_0 i \left[\frac{11}{b} + \frac{1}{a} \right] (+\hat{k})$

2e) (0,4)



2f) (0,4)



Tangencial ao círculo

2g) (0,2)

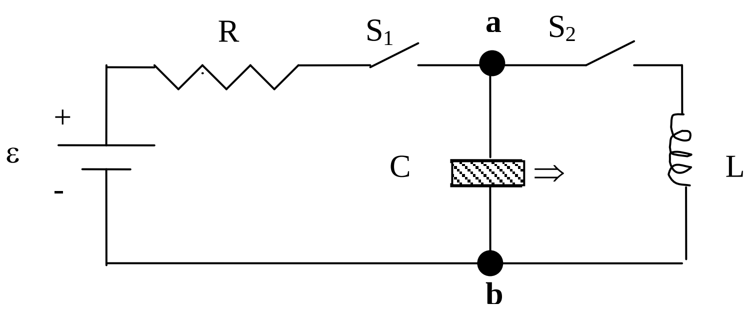
$$\vec{F}_m = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = I_1 \vec{L}_1 \times \vec{B}_2$$

porem $\vec{L}_1 \parallel \vec{B}_2 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{F}_m = \vec{0}}}$

3ª Questão: (3,5)

Considere o circuito da figura abaixo onde um capacitor com um meio de constante dielétrica k > 1 tem capacitância C conhecida. Neste circuito ocorrem as seguintes fases sucessivas:

- fase 1: chave S_1 fechada e S_2 aberta durante longo tempo.
- fase 2: chave S_1 aberta , S_2 aberta e o meio do capacitor substituído por vácuo.
- fase 3 : chave S_1 fechada e S_2 aberta durante longo tempo.
- fase 4 : chave S_1 aberta e S_2 fechada durante longo tempo.



Determine, **justificando** todas as respostas:

a) A corrente no resistor em função do tempo durante a fase 1.

b) A energia fornecida pela bateria durante a fase 1.

c) A d.d.p. ($V_a - V_b$) **com sinal** no final da fase 2.

d) A corrente que passa no resistor (sentido e intensidade) no início e no final da fase 3.

e) A diferença entre a energia armazenada no capacitor no início e no final da fase 3.

f) A energia consumida pelo resistor na fase 3.

g) A d.d.p. ($V_a - V_b$) **com sinal** em função do tempo durante a fase 4.

Solução

a) fase1 : carregamento do capacitor ⇒ **$i(t) = (\varepsilon/R) \exp(-t/RC)$**

b) $U = U_R + U_C = \int_0^\infty R\, i(t)^2\, dt + \frac{1}{2} C (V_C)^2 = \frac{1}{2} C \varepsilon^2 + \frac{1}{2} C \varepsilon^2 = \mathbf{C\,\varepsilon^2}$

$\int_0^\infty R\, i(t)^2\, dt = \int_0^\infty R\, (\varepsilon/R)^2 e^{-2t/RC}\, dt = \frac{1}{2} C \varepsilon^2$; Final da fase 1: $V_c = \varepsilon$

c) fase 2 : troca do meio ⇒ $C' = C/k$

conservação da carga ⇒ q' = carga do final da fase 1 = εC

$V_a - V_b$ $= q'/C' =$ **$k\,\varepsilon$**

d) **início** da fase 3 : **$i = (k\varepsilon - \varepsilon)/R = \varepsilon(k-1)/R$ com sentido anti-horário**.

Final da fase 3 : i = 0

e) início da fase 3: $U_C = 1/2\, C'(k\varepsilon)^2 = \frac{1}{2} k C \varepsilon^2$

final da fase 3: $U_C = \frac{1}{2} C' \varepsilon^2 = \frac{1}{2} C \varepsilon^2/k$; **$\Delta U_C = \frac{1}{2} C \varepsilon^2 (k - 1/k)$**

f) fase 3: $i(t) = i(0)\, e^{-t/rC'} = \dfrac{(k-1)\varepsilon}{R} e^{-t/RC'}$ **; U_R =** $\int_0^\infty R\, i(t)^2\, dt$ = **$\frac{1}{2} C \varepsilon^2 (k-1)^2/k$**

g) fase 4 : circuito oscilante LC ⇒ **$V_a - V_b = \varepsilon \cos(wt)$**

$w = 1/\sqrt{LC'}$