PUC-RIO – CB-CTC

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 11.04.11 – segunda-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:_____________________________________Turma:_______________

<u>NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.</u>

<u>Não é permitido destacar folhas da prova</u>

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,0		
2ª Questão	3,5		
3ª Questão	3,5		
Total	10,0		

<u>A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.</u>

Formulário e constantes físicas.

$\varepsilon_0 = 9\text{x}10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N\ m^2}$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

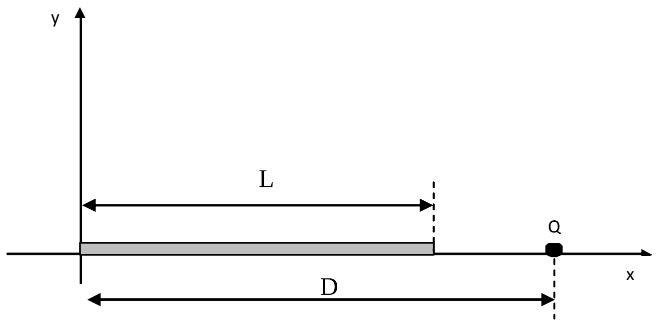
$$\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

P1 DE ELETROMAGNETISMO – 11.04.11 – segunda-feira

1ª Questão: (3.0)

A figura abaixo mostra uma barra não-condutora de comprimento L e densidade linear de carga não uniforme $\lambda(x) = \alpha_0\, x$ [C/m]. A uma distância D da origem do sistema de coordenadas representado abaixo está uma carga Q. Se a carga total da barra vale q_{barra} determine:

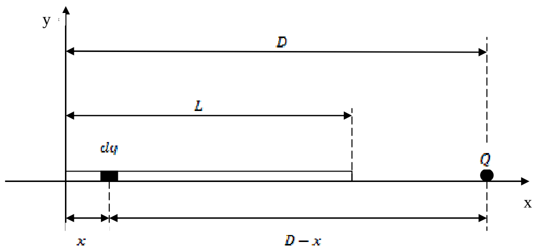


(a) (**1.0**) O valor da constante α_0 em função da carga q_{barra} da barra.

(b) (**2.0**) Considerando D = 2L, use a lei de Coulomb para encontrar o valor da força **F** (<u>módulo, direção e sentido</u>) exercida pela barra sobre a carga Q. <u>Justifique todos os cálculos</u>.

Solução

(a)



$$dq = \lambda(x)dx \Rightarrow q_{barra} = \alpha_0 \int_0^L x\, dx = \frac{1}{2}\alpha_0 L^2$$

logo

$$\alpha_0 = \frac{2\, q_{barra}}{L^2} \text{ [C / m}^2\text{]}$$

(b) A força exercida pela barra sobre a carga **Q** terá apenas componente na direção horizontal $(\hat{x})$. De acordo com a lei de Coulomb o elemento de carga **dq** exerce sobre a carga uma força **dFx**

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q.dq}{(D-x)^2}$$

Onde, $dq = \lambda(x)\, dx = \alpha_0\ x\ dx$

Portanto,

$$F_x = \frac{\alpha_0\ Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{(D-x)^2}dx = \frac{2q_{barra}\ Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\int_0^L \frac{x}{(D-x)^2}dx$$

Mas: $\int \frac{xdx}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} + \ln|a-x|$ (pagina de rosto)

portanto:

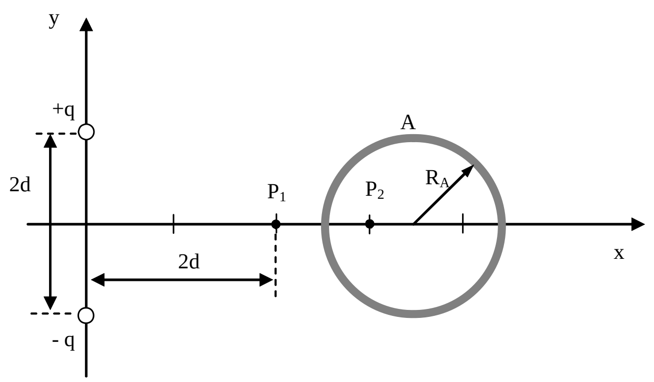
$$F_x = \frac{2q_{barra}\ Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left[\frac{D}{(D-x)} + \ln|D-x|\right]_0^L = \frac{2q_{barra}\ Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left[\frac{L}{D-L} + \ln\frac{D-L}{D}\right]$$

Se D=2L (como afirma o enunciado), então:

$$|F_x| = \frac{2q_{barra}\ Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}[1 - \ln 2]$$

2ª Questão: (3.5)

Duas cargas +q e –q estão posicionadas no eixo y como mostrado na figura acima. Na mesma região existe uma <u>casca esférica delgada isolante</u> A de raio $R_A = d$ uniformemente carregada com uma carga $Q_A = +2q$. Considere o ponto P_1 colocado no eixo x a uma distância 2d da origem.



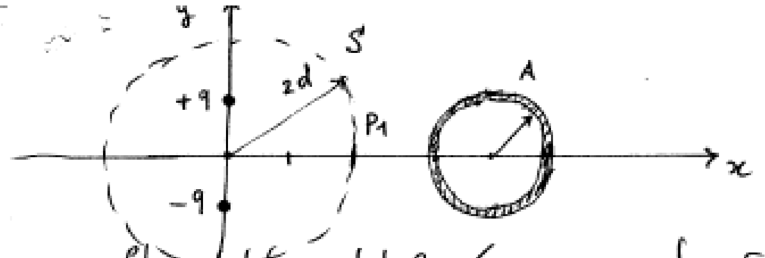
a) (**1.0**) Calcule o <u>fluxo elétrico total</u> Φ_T que atravessa a superfície gaussiana S de raio r = 2d centrada na origem do sistema de coordenadas e que passa pelo ponto P_1. <u>Justifique todos os seus cálculos e afirmações</u>.

b) (**1.0**) Calcule o vetor campo elétrico no ponto P_1.

c) (**1.0**) Calcule o vetor campo elétrico no ponto P_2 a uma distância x = 3d como mostrado na figura. <u>Justifique todos os seus cálculos e afirmações</u>.

d) (**0.5**) Caso a casca esférica fosse condutora, o resultado do item c) mudaria? Se sim, como. Se não, justifique.

SOLUÇÃO

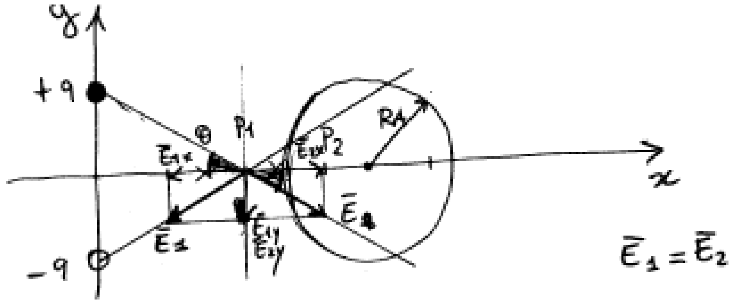


a) O fluxo elétrico total ϕ_T que atravessa uma superfície gaussiana S de raio $r = 2d$ centrado na origem do sistema de coordenadas vale:

$\phi_T = 0$ já que a carga interna à sup. gaussiana S é zero.

b) Para calcular o campo elétrico no ponto P_1 preciso levar em conta as cargas +q e −q no eixo y e a casca esférica A. Todos contribuem para $\bar{E}_{P_1}$

Portanto:



$\bar{E}_1 = \bar{E}_2$

$\bar{E}_{1x} = -\bar{E}_{2x}$ estas componentes se anulam

$\bar{E}_{1y} = \bar{E}_{2y} = \bar{E}_1 \, \text{sen}\,\theta = \dfrac{kq}{r^2} \, \text{sen}\,\theta$

O campo elétrico devido ao dipolo vale:

$\bar{E}_d = 2 \bar{E}_1 \, \text{sen}\,\theta = 2 \dfrac{kq}{r^2} \, \text{sen}\,\theta \, (-\hat{y})$

$$r = \sqrt{4d^2 + d^2} = d\sqrt{5}$$

$$d = r \,\text{sen}\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{d}{r} = \frac{\cancel{d}}{\cancel{d}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{E}_d = 2\frac{kq}{5d^2}\frac{1}{\sqrt{5}}(-\hat{j}) = \frac{2kq}{5\sqrt{5}\,d^2}(-\hat{j})$$

O campo elétrico no ponto P_1 devido à casca esférica vale por Gauss:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \bar{E}_c = \frac{k2q}{\left(d+\frac{d}{2}\right)^2}(-\hat{x}) \qquad \boxed{k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}}$$

$$\bar{E}_c = \frac{2kq}{9d^2}(-\hat{x}) = \frac{8}{9}k\frac{q}{d^2}(-\hat{x})$$

0,4

4

O campo total em P_1 será então: $\bar{E}_{P_1} = \bar{E}_d + \bar{E}_c$

$$\bar{E}_{P_1} = -\frac{8}{9}k\frac{q}{d^2}(\hat{i}) - \frac{2kq}{5\sqrt{5}\,d^2}(\hat{j})$$

$$\boxed{\bar{E}_{P_1} = -\frac{2kq}{d^2}\left[\frac{4}{9}\hat{i} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\hat{j}\right]}$$

c) No ponto P_2 o campo devido ao dipolo no eixo y será:

$$\bar{E}_d' = \frac{2kq}{r'^2} \operatorname{sen}\theta \, (-\hat{j})$$

desta vez:

$$r = \sqrt{9d^2 + d^2} = d\sqrt{10}$$

$$d = r \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\cancel{d}}{\cancel{d}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\bar{E}_d' = \frac{2kq}{d^2 \cdot 10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (-\hat{j}) = \frac{kq}{5\sqrt{10}\, d^2} (-\hat{j})$$

O campo devido à casca esférica no ponto P_2 por Gauss vale:

$$\oint_{S'} \bar{E}_c \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} = 0$$

onde S' é a sup. Gaussiana centrada no centro da casca e que passa por P_2.

Portanto:

$$\bar{E}_{P_2} = \frac{kq}{5\sqrt{10}\, d^2} (-\hat{j})$$

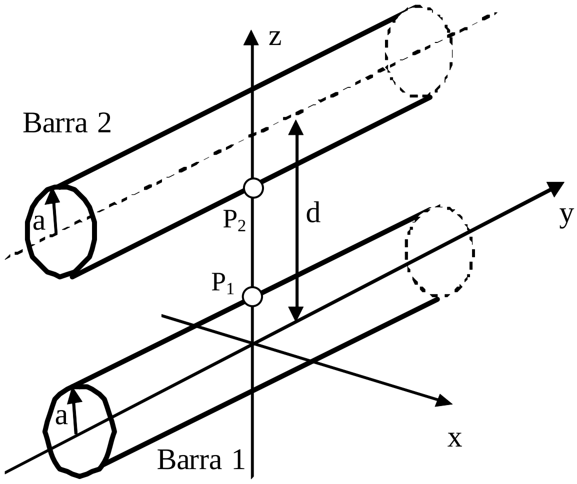
d) Se a casca é condutora o resultado do item anterior seria:

$$\bar{E}_{P_2} = \bar{0}$$

já que estamos no interior de um condutor.

3ª Questão: (3.5)

Considere duas barras 1 e 2 cilíndricas muito longas, paralelas**, isolantes**, ambas de raio **a**, uniformemente carregadas com densidades de carga $\lambda_1 = K > 0$ [C/m] e $\lambda_2 = - K$ [C/m] e seus eixos distantes no plano YZ de **d** metros, conforme a figura.



a) (**1.5**) Utilizando a Lei de Gauss e o princípio da superposição, calcule o campo elétrico na região do plano YZ **entre as barras** ($a \le z \le d-a$).

b) (**1.0**) Considerando que o potencial da barra 1 é nulo no ponto $P_1(0,0,a)$ no plano YZ, determine o potencial da barra 2 no ponto $P_2(0,0,d-a)$ no mesmo plano YZ.

c) (**1.0**) Se um partícula de massa M e carga total Q > 0 for solta da superfície da barra 1 com potencial nulo, então qual é a sua velocidade final?

SOLUÇÃO

Solução

a) campo da barra 1 : $\overline{E}1 = \dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r} \Rightarrow \overline{E}1 = \dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0 z}\vec{z}$ *no planoYZ* **(0,5)**

campo da barra 2 : $\overline{E}2 = -\dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r} \Rightarrow \overline{E}2 = \dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0 (d-z)}\vec{z}$ *no planoYZ* **(0,5)**

campo total : $\overline{E}_{total} = \dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{d-z}\right)\vec{z}$ **(0,5)**

b) **(0,5)** $V2 - V1 = -\int_a^{d-a} \overrightarrow{E} \bullet d\vec{s} = -\dfrac{K}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a} [(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{d-z})\vec{z}] \bullet (dz\,\vec{z}) = \dfrac{K}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{d-a}\right)$

$V1 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{V2} = \dfrac{K}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{d-a}\right)$ **(0,5)** negativo porque d > 2a

c) posição final da partícula: superfície da barra 2 em z = d –a do plano YZ

variação de energia potencial : $\Delta U = Q\,(V2 - V1) = \dfrac{KQ}{\pi\varepsilon_0}\ln(\dfrac{a}{d-a})$

conservação da energia $\Rightarrow$ $\Delta K = -\Delta U = \dfrac{1}{2}M\,(v_f^{\ 2} - v_i^2)$; velocidade inicial $v_i = 0$ **(0,5)**

velocidade final : $v_f = \sqrt{\dfrac{2KQ}{\pi\,\varepsilon_0\,M}\ln(\dfrac{d-a}{a})}$ **(0,5)**