1ª Questão

Um barco com os motores desligados desliza sobre a superfície de um lago com velocidade constante até o instante t=0 em que o capitão liga os motores que imprimem ao barco uma aceleração constante $\vec{a}$ até este atingir, em $t = t_f$, alguma das duas margens do lago que se mostra na **FIG. 1**. A **FIG. 1** mostra também a situação do barco em t=0. **São dados:** $|\vec{v}_0| = 8$ **m/s,** $|\vec{a}| = 0{,}6$ **m/s²** , $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$.

sen30 = cos60 = 1/2
sen60 = cos30 = √3/2

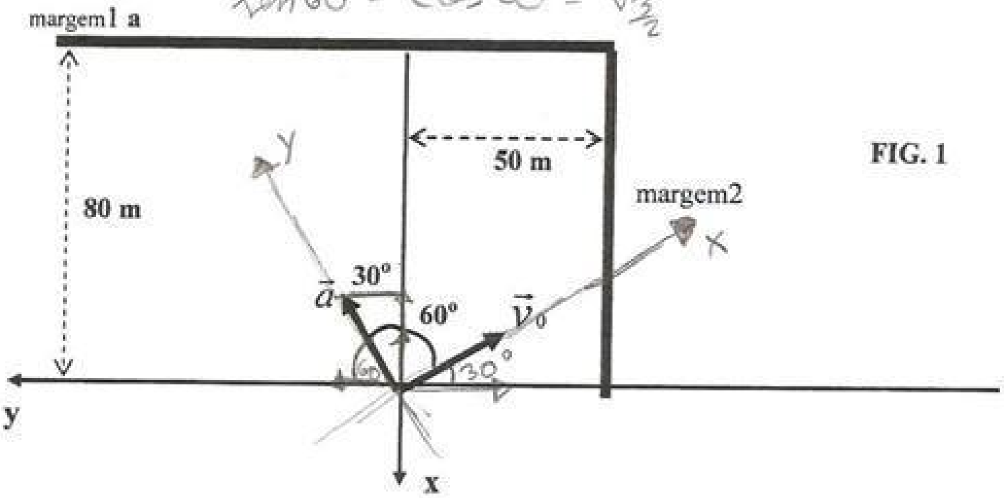


FIG. 1

a) Obtenha as funções x(t) e y(t) que descrevem o movimento das sombras x e y respectivamente. Mostre as etapas do desenvolvimento. Dê as respostas com duas casas decimais.

$a_x = \cos 30° \cdot \vec{a}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}6 = -0{,}52 \text{ m/s}^2$

$a_y = \text{sen}30° \cdot \vec{a}_0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6 = 0{,}30 \text{ m/s}^2$

$v_x = \text{sen}30° \, \vec{v}_0 = \frac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow -4 \text{ m/s}$

$v_y = \cos 30° \, \vec{v}_0 = \frac{\sqrt{3} \, 8}{2} \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow -6{,}92 \text{ m/s}$

x(t) = $-4{,}00 - 0{,}26t^2$ (m/s)
y(t) = $-6{,}92t + 0{,}15t^2$ (m/s)

2,40

4,23

b) Diga onde bate o barco, na **margem1** ou na **margem2** do lago, em que valor das coordenadas $x(t_f)$ e $y(t_f)$ e em que instante de tempo t_f isto ocorre. Dê as respostas com três dígitos significativos.

$x(t) = -4t - 0{,}26t^2 = -80$

$0{,}26t^2 + 4t - 80 = 0$

$t = 11{,}5\ s$

$y(t) = -6{,}92t + 0{,}15t^2$

$y(11{,}5) = -59{,}8\ m$ ñ convém

$y(t) = -6{,}92t + 0{,}15t^2 = -50$

$0{,}15t^2 - 6{,}92t + 50 = 0$

$t = 8{,}96\ s$

Margem onde bate o barco: margem 2

$x(t_f) = -57{,}0\ m$

$y(t_f) = -50{,}0\ m$ 2+0,6

$t_f = 8{,}96\ s$

c) Calcule o vetor velocidade $\vec{v}_f$ do barco e o seu módulo no instante t_f. Dê a resposta na representação analítica e desenhe-o na **FIG.1.** O vetor velocidade deve ter sua origem coincidente com a posição do corpo no instante considerado.

$x'(t) = -4 - 0{,}52t \Rightarrow x'(8{,}96) \Rightarrow -8{,}66\ m/s^2$

$y'(t) = -6{,}92 + 0{,}30t \Rightarrow y'(-8{,}96) \Rightarrow -4{,}32\ m/s^2$

$|\vec{v}_f|^2 = v_x^2 + v_y^2$

$|\vec{v}_f| = 9{,}68\ m/s^2$

$\vec{v}_f = -8{,}66\hat{j} - 4{,}32\hat{i}$

$|\vec{v}_f| = 9{,}66\ m/s^2$ 2 0,7

b) Um outro observador utiliza um sistema de eixos com a mesma origem do observador anterior, mas o eixo **x** está na direção e sentido da velocidade inicial $\vec{v}_0$ do barco e o eixo **y** na direção e sentido da aceleração $\vec{a}$ do barco. Para as seguintes grandezas, diga qual (quais) possui (possuem) o mesmo valor para os dois observadores, dê o novo valor quando houver modificação e explique porque se mantém constante quando for o caso:

(i)o tempo t_f' para o barco bater em alguma das margens,

(ii)o módulo da velocidade final, $|\vec{v}(t_f')|$,

(iii)a componente $\mathbf{v_x}$ da velocidade quando quando o barco bater em alguma das margens.

i) mantem-se o mesmo, pois a mudança dos eixos não influencia no movimento

$x(t) = 2t$

$y(t) = 0.3t^2$

$\to v_x(t) = 8$

$v_y(t) = 0.6t$

$v_y(t_f) = 5.4$

$|\vec{v}_f|^2 = v_x^2 + v_y^2$

$|\vec{v}_f| = 9.66$

ii) Não muda. Pois o modulo é uma característica do vetor

iii) muda pois a componente v_x depende da orientação dos eixos

$v_x(t_f)$

$\mathbf{v_x(t)} =$ 8 m/s
$\mathbf{t_f'} =$ 8,96 s
$\lvert\vec{v}\rvert =$ 9,66 m/s

2,0

2ª Questão:

No cálculo de grandezas escalares, use π = 3,14. Para grandezas polares (angulares) dê as respostas em função de π.

As figuras mostram uma pista circular de raio **R** que é percorrida com movimento uniforme por uma patinadora. O sistema de referência cartesiano (x,y) aparece representado na **FIG. 2-1** e a convenção para a coordenada polar **θ**, também mostrada, é a padrão. Use a **FIG. 2-2** para representar os vetores pedidos abaixo.

04/10

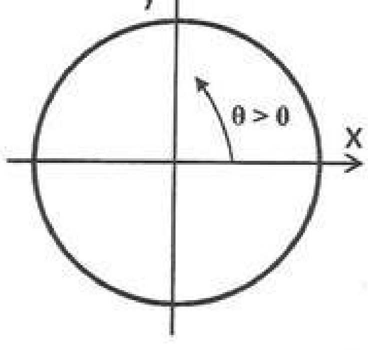


FIG. 2-1

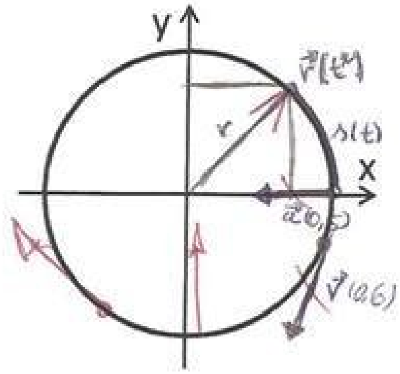


FIG. 2-2

a) Em certo instante **t*** ao longo do movimento da patinadora, o vetor posição é dado por $\vec{r}(t^*) = (2{,}5\sqrt{2}m)\hat{i} + (2{,}5\sqrt{2}m)\hat{j}$. Calcule o raio **R** da pista, represente na **FIG.2-2** o vetor $\vec{r}(t^*)$ e encontre o valor da coordenada polar θ(t*).

$r^2 = (2{,}5\sqrt{2})^2 + (2{,}5\sqrt{2})^2$

$r = 5m$

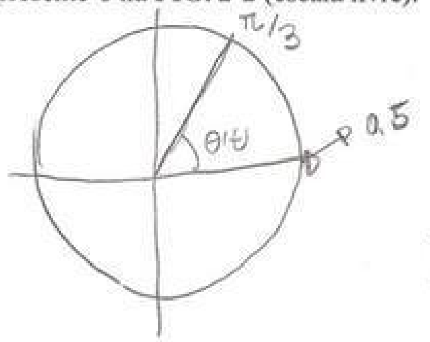
$\theta(t^*)$

$tg\,\theta(t^*) = \frac{2{,}5\sqrt{2}}{2{,}5\sqrt{2}} = 1 \rightarrow 45° \rightarrow \frac{\pi}{4}$

R = 5m

θ (t*) = $\frac{\pi}{4}$ rad

b) Suponha $\theta_0 = \pi/3$ e que a patinadora se mova no sentido horário. Sabendo que o vetor aceleração $\vec{a}$ fica apoiado no eixo y pela primeira vez após **0,5 s** do início do movimento, calcule a velocidade angular **ω**, dê a função **θ(t)**, encontre o vetor $\vec{a}(0{,}5s)$ na representação analítica e represente-o na **FIG. 2-2** (escala livre).



$\theta(t) = \frac{\pi}{3} - \omega t \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t$

$\omega = \frac{\pi}{3}/0{,}5 = \frac{2\pi}{3}$

$y(t) = sen(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t)\,5$

$y'(t) = cos(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t)(-\frac{10\pi}{3})$

$y''(t) = -sen(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t)(\frac{20\pi^2}{9})$

$x''(t) = -cos(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t)(\frac{20\pi^2}{9})$

$x''(0{,}5) = -\frac{20\pi^2}{9}$

ω = $-\cancel{\frac{2\pi}{3}}$

θ(t) = $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ + EP (rad, s)

$\vec{a}(0{,}5s) =$ $-\frac{20}{9}\pi^2\,\hat{j}$

06/10

c) Para o movimento descrito no item (b), escreva a expressão do vetor posição com o tempo $\vec{r}(t)$. Calcule o período **T** e dê a função **s(t)** para esse movimento. Represente também na **FIG. 2-2** (escala livre) o vetor $\vec{v}(0{,}6s)$.

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} t\right) \cdot 5$$

$$y(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} t\right) \cdot 5$$

$$\vec{r}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} t\right) \cdot 5\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} t\right) 5\,\hat{\jmath}$$

$$\theta(T) = \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} T$$

$$x'(t) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t\right) \cdot \frac{10\pi}{3}$$

$$y'(t) = \cos(\ldots\ldots) \cdot \frac{10\pi}{3}$$

$$x'(t) = -2{,}18 \text{ m/s}$$

$$-\frac{2\pi}{3} T = -2\pi$$

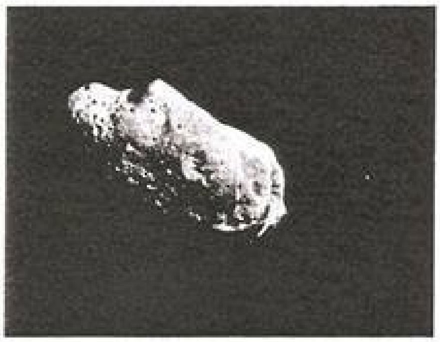
$$T = 3s$$

$$s(t) = \frac{5\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} t$$

$\vec{r}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t\right)5\hat{\imath} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}t\right)5\hat{\jmath}$
T = 3 s
s(t) = $\frac{5\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}t$ (m/s)

3ª Questão

Asteróides são objectos rochosos e metálicos que orbitam o Sol mas são pequenos demais para serem considerados planetas. Alguns têm órbitas que passam bem próximas à órbita da Terra. Em 2010, um asteróide visitante denominado a RX30 2010 passou a cerca de 250.000 km acima da superfície terrestre. Esta distância é 0,7 vezes a distância entre a Terra e a Lua.



Considere um trecho da trajetória do asteroide RX30 2010 contornando a Terra, mostrado esquematicamente na **FIG. 3** , e a decomposição no sistema de referência, cuja origem está no centro do planeta (representado pelo ponto O).

$y'(x) = -10x$

$y'(0,2) = -2$

$\frac{v_y}{v_x} = -2 \quad v_y = -2v_x$

$v_y^2 + v_x^2 = 400$

$-2v$

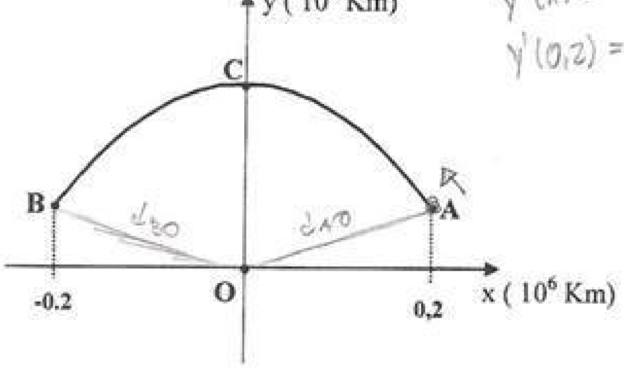


FIG. 3

No trecho indicado na **FIG.3**, a trajetória do asteróide pode ser aproximada pela equação:

$$y(x) = 0{,}35 - 5\,x^2 \qquad (x \text{ e } y \text{ em milhões de quilômetros}).$$

O asteróide contorna o planeta no sentido anti-horário com velocidade de módulo constante: $|\vec{V}| = 20$ km/s.

Marque **V**(verdadeiro), **F**(falso) ao lado de cada uma das 10 afirmações a seguir, **justificando sua resposta**. **<u>Resposta errada, sem justificativa, com justificativa errada ou em branco: 0,0.</u>** Todas as perguntas referem-se ao trecho considerado na **FIG.3**.

1 [V] o vetor posição do ponto **B** é $\vec{r_B} = -0{,}2\,\mathbf{i} + 0{,}15\,\mathbf{j}$ (10^6 Km, 10^6 Km);

$B \Rightarrow x \Rightarrow -0{,}2 \quad y(-0{,}2) = 0{,}35 - 5.(0{,}2)^2 \Rightarrow \underline{0{,}15}$

$\vec{r}_B = -0{,}2\hat{i} + 0{,}15\hat{j}$

2 [V] Os pontos **A** e **B** correspondem à mesma distância à Terra: $d_{AO} = d_{BO} = 0{,}25 \times 10^6$ km.

$d_{AO} = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}15)^2} \quad d_{AO} = \underline{0{,}25} \times 10^6 \text{ km} = d_{BO}$

3 [V] $|\vec{r}_A| < |\vec{r}_C|$;

$y(x) = 0{,}35 - 5x^2 = 0$

$5x^2 = 0{,}35$

$x^2 = 0{,}07$

$x = 0{,}26$

$|\vec{r}_A| = 0{,}25 \quad |\vec{r}_C| = 0{,}26$

4 [F] sendo a distância entre os pontos **A** e **B**, $d_{AB} = 0{,}4 \times 10^6$ Km , o asteróide leva $2{,}0 \times 10^4$ segundos para percorrer o trecho **AB** da trajetória;

$2{,}0 \times 10^4$ s seria se o movimento de x fosse uniforme

E x $0{,}4 \times 10^6 / 20 \Rightarrow 2{,}0 \times 10^4$ s

porém, o movimento não é uniforme.

5 [F] no ponto **C**, a velocidade da sombra *x* é $v_x = 20$ Km/s;

A velocidade v_x no eixo x, é -20 Km/s em C

6 [F] no ponto **B**, a velocidade da sombra y é $v_y = 20$ Km/s;

$y'(x) = -10x$

$y'(0{,}2) = 2 \quad tg\,\theta = 2 \quad \frac{v_y}{v_x} = 2 \quad v_y = 2v_x$

$\frac{v_y}{v_x} = y'(x)$

$v_y = v_x\, y'(x)$

$v_x\, y'(x) = \sqrt{400 - v_x^2}$

$v_x^2 + v_y^2 = 400$

$v_x^2 + (2v_x)^2 = 400$

$5v_x^2 = 400$

$v_x^2 = \sqrt{80}$ km/s

$v_y = 2\sqrt{80}$ km/s $\neq 20$

7 [F] o movimento da sombra x é uniforme;

Não, pois existe uma variação de velocidade na sombra x em função do vetor velocidade tangente a trajetória

8 [V] no trecho **CB** a aceleração da sombra y é negativa;

Sim. Pois a tangente $(y'(x))$ aumenta aumentando v_y negativamente

9 [F] quando o asteróide passa pelo ponto **A** tem-se que $v_x = -2\,v_y$;

$$y'(x) = -10t$$
$$y'(0,2) = -2$$
$$\frac{v_y}{v_x} = -2$$
$$v_y = -2v_x$$

10 [F] o vetor aceleração $\vec{a}$ é igual a zero;

Durante o movimento há uma aceleração em função da 2ª derivada de $y(x)$, que é diferente de zero