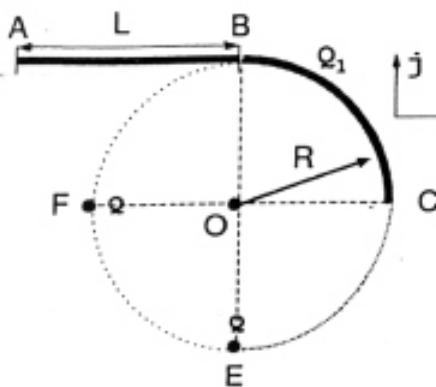


1ª Questão: (3,5)

O diagrama abaixo mostra duas cargas elétricas puntiformes nas posições E e F, um arco de carga BC e uma barra retilínea AB. Os pontos B, C, E e F estão ao longo da circunferência de raio R e centro O, e o segmento AB é tangente à circunferência.



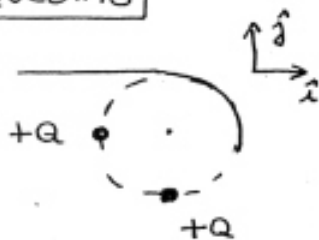
(0,6) As cargas nos pontos E e F tem valor Q. Qual é o campo elétrico resultante destas duas cargas no ponto O? (módulo, direção e sentido).

(0,5) O arco BC ocupa  $\frac{1}{4}$  do círculo e tem carga total  $Q_1$ . Qual é a densidade linear de carga neste arco?

(1,2) Qual é o valor da carga  $Q_1$  (como função de Q) de modo que o campo em O, resultante do arco e das cargas em E e F, seja nulo?

(1,2) Calcule o campo em O devido à barra AB, de comprimento L e carga Q (se necessitar alguma integral, veja a folha de rosto da prova).

1ª QUESTÃO



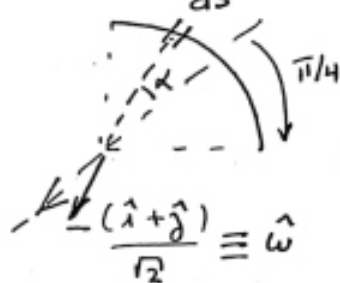
$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{j}$$

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} (\hat{i} + \hat{j}) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \left( \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}} \right)$$

b) O comprimento do arco BC é  $L = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi}{2} R$   
 Como a carga é  $Q_1$  e  $\lambda = \frac{Q_1}{L}$   $\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{Q_1}{R}$

c) O campo gerado pelo arco BC em O, por simetria terá a direção  $-\left(\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}\right)$ . Logo necessitamos calcular a contribuição de cada segmento, projetada naquele direção.

Direção  $-\left(\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}\right) \equiv \hat{w}$



$$dE_w = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\alpha \quad \text{onde } dq = \lambda ds$$

$$dq = \lambda R d\alpha$$

Então

$$E_w = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{R^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\alpha \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \left. 2\sin\alpha \right|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$E_w = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} 2\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2}$$

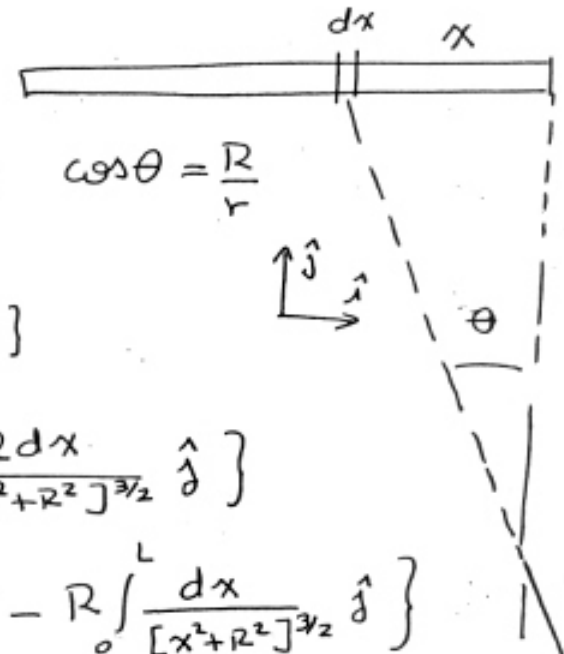
Deve ser comparada.

$$E_w = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} \quad \text{com o item a) } E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

Portanto  $\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$

$$Q_1 = \frac{\pi}{2} Q$$

d)  $\lambda = Q/L$   
 $dq = \lambda dx$



$r = (x^2 + R^2)^{1/2}$        $\sin \theta = \frac{x}{r}$        $\cos \theta = \frac{R}{r}$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \{ \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j} \}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{x dx}{[x^2 + R^2]^{3/2}} \hat{i} - \frac{R dx}{[x^2 + R^2]^{3/2}} \hat{j} \right\}$$

$$\vec{E} = \int_0^L d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \int_0^L \frac{x dx}{[x^2 + R^2]^{3/2}} \hat{i} - R \int_0^L \frac{dx}{[x^2 + R^2]^{3/2}} \hat{j} \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{[x^2 + R^2]^{1/2}} \Big|_0^L \hat{i} - \frac{R x}{R^2 [x^2 + R^2]^{1/2}} \Big|_0^L \hat{j} \right\} \quad d\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{L} \left\{ \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{[L^2 + R^2]^{1/2}} \right] \hat{i} - \frac{L}{R [L^2 + R^2]^{1/2}} \hat{j} \right\}$$

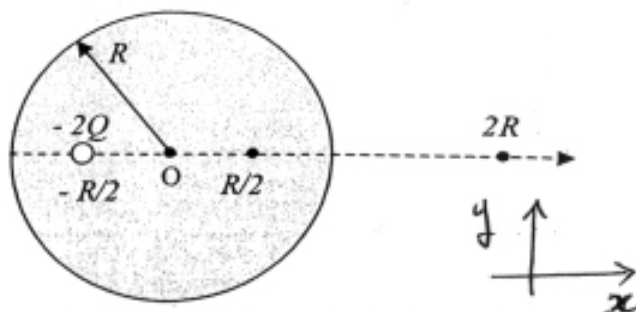
$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{LR [L^2 + R^2]^{1/2}} \left\{ [(L^2 + R^2)^{1/2} - R] \hat{i} - L \hat{j} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R [L^2 + R^2]^{1/2}} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{R^2}{L^2}\right)^{1/2} - \frac{R}{L} \right] \hat{i} - \hat{j} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{L [L^2 + R^2]^{1/2}} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right)^{1/2} - 1 \right] \hat{i} - \frac{L}{R} \hat{j} \right\}$$

2ª Questão: (3.5)

Considere uma esfera de raio  $R$ , de material isolante e uniformemente carregada, conforme ilustra a figura ao lado. Seja  $Q$ , positiva, a carga distribuída em todo volume da esfera. Distando  $R/2$  do centro  $O$  da esfera encontra-se uma carga puntiforme  $-2Q$ , negativa.



- (a) (0,5) Calcule o valor do **vetor campo elétrico** no centro da esfera. Justifique detalhadamente os seus cálculos.
- (b) (1,0) Calcule o valor do **vetor campo elétrico** no ponto  $r = R/2$ , conforme a figura. Justifique detalhadamente os seus cálculos.
- (c) (1,0) Calcule o valor do **vetor campo elétrico** no ponto  $r = 2R$ , conforme a figura. Justifique detalhadamente os seus cálculos.

Suponha agora que uma casca esférica condutora carregada com carga líquida  $4Q$  (espessura  $d$ , raio médio  $2R$ ) é colocada concêntrica com a esfera isolante. Ao mesmo tempo, a carga puntiforme  $-2Q$  é movida para o centro da esfera isolante.

- (d) (1,0) Nesta nova configuração, encontre as distribuições de carga nas superfícies interna e externa da casca condutora. Justifique.

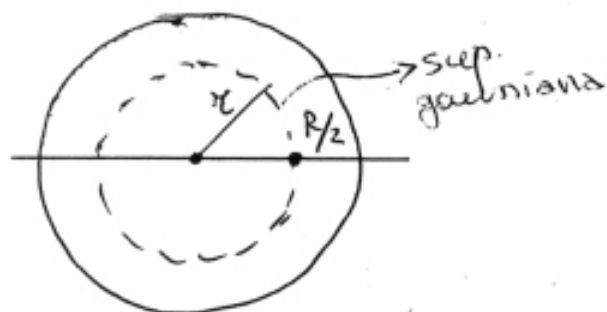
(a) O problema é sobre a utilização do princípio de superposição.

$$\vec{E}_{\text{centro}} = \vec{E}_{\text{esfera}} + \vec{E}_{\text{carga}} = \vec{0} + k \frac{(-2Q)\hat{x}}{(R/2)^2} = -\frac{2kQ\hat{x}}{R^2/4} = -\frac{8kQ}{R^2}\hat{x}$$

$\vec{E}_{\text{esfera}} = 0$  por razões de simetria.

Isto pode ser demonstrado usando a lei de Gauss e verificando que  $|E| \propto r$ .

(b) No ponto  $r = R/2$  :  $\vec{E}_{R/2} = \vec{E}_{\text{esfera}} + \vec{E}_{\text{carga}}$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss}$$

A esfera isolante é carregada uniformemente, portanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{Q_i}{\frac{4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3}{3}} \Rightarrow Q_i = Q \frac{R^3}{8R^3} = \frac{Q}{8}$$

$$\Rightarrow |E| \cdot \frac{4\pi R^2}{4} = \frac{Q}{\epsilon_0 8}$$

$$\vec{E}_{\text{enf}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{kQ}{2R^2} \hat{x}$$

Para a carga teremos:

$$\vec{E}_Q = k \frac{(-2Q)}{R^2} \hat{x} = -k \frac{2Q}{R^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{\text{enf}} + \vec{E}_Q = k \frac{Q}{2R^2} \hat{x} - k \frac{2Q}{R^2} \hat{x} = -\frac{3}{2} k \frac{Q}{R^2} \hat{x}$$

(c) No ponto  $r=2R$  podemos aplicar o mesmo raciocínio. Neste caso, o campo devido à esfera será:

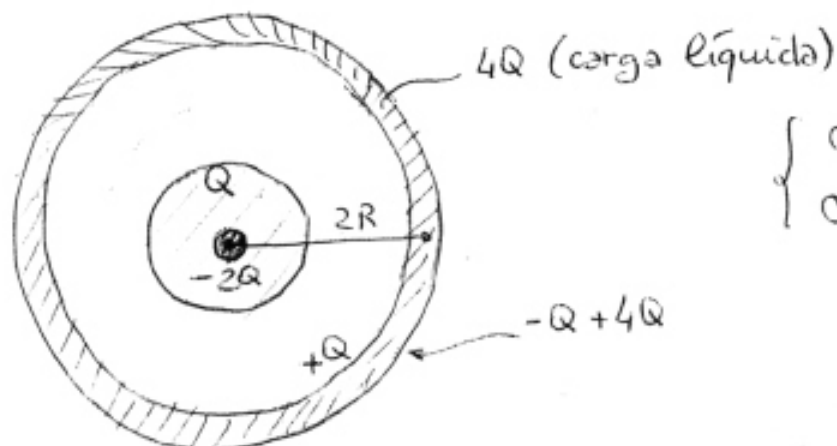
$$\vec{E}_{\text{enf}} = k \frac{Q}{(2R)^2} \hat{x} = k \frac{Q}{4R^2} \hat{x}$$

Para a carga:

$$\vec{E}_Q = k \frac{(-2Q)}{\left(2R + \frac{R}{2}\right)^2} = -\frac{8kQ}{25R^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{\text{enf}} + \vec{E}_Q = k \frac{Q}{4R^2} \hat{x} - \frac{8kQ}{25R^2} \hat{x} = -\frac{7kQ}{100R^2} \hat{x}$$

(d)



$$\begin{cases} \sigma_i = +Q \\ \sigma_e = +3Q \end{cases}$$

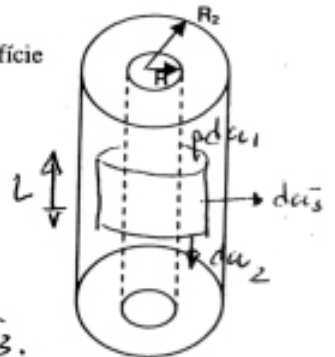
3ª Questão: (3.0) - GABARITO

Um cabo é composto de um fio condutor oco, infinito e de raio  $R$  e está carregado com uma densidade uniforme de carga por unidade de área  $\sigma$ . Um casca cilíndrica condutora, também infinita, de raio  $R_2$  e carga líquida zero envolve todo o fio como mostra a figura abaixo. Determine:

- (1.0) a) o módulo, direção e sentido do campo elétrico entre a casca cilíndrica e a superfície do fio ( $R < r < R_2$ )?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{(tampa)}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \int_{\text{(base)}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_2 + \int_{\text{(corpo)}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow$$

Como o fio é infinito, o campo elétrico será sempre radial! Logo,  $\vec{E}_1 \perp d\vec{a}_1$ ,  $\vec{E}_2 \perp d\vec{a}_2$ , e  $\vec{E}_3 \parallel d\vec{a}_3$ .



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int E_3 \hat{r} \cdot d\vec{a}_3 \hat{r} = E_3 \int da_3 = E_3 2\pi r L = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi r L}$$

- (1.0) b) a diferença de potencial eletrostático entre a casca cilíndrica de raio  $R_2$  e a superfície do fio de raio  $R$

$$V_{R_2} - V_R = - \int_R^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^{R_2} \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot dr \hat{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{R_2} - V_R = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_R^{R_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r \Big|_R^{R_2} = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{V_{R_2} - V_R = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right)}$$

- (1.0) c) o trabalho realizado por uma força externa para se transportar uma carga da casca cilíndrica para a superfície do fio?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = - q \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = - q \int_{R_2}^R \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \left( - \int_{R_2}^R \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = q \left[ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W = q \left[ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right) \right]}$$